経済動学・講義資料 3

神戸大学大学院経済学研究科

2015 年度前期

担当: 佐藤健治 mail@kenjisato.jp

2015 年 4 月 6 日

Levhari and Liviatan (1972) による最適軌道の局所理論を解説する．彼らの研究の動機になっているのは, おそらく線形近似に関する Hartman–Grobman の定理であろう．ラムゼーモデルの最適性に関する Euler 方程式が定める力学系は割引因子 ρ が十分 1 に近い場合に必ず双曲型になる (絶対値が 1 の固有値を持たない)．したがって, 線形近似によって力学系の定性的な性質を分析することが可能である.

1. Hartman–Grobman の定理

Pugh (1969) による証明を紹介する.

E を Banach 空間とする．$L : E \to E$ を可逆な双曲型線形力学系とする．すなわち, 直和分解 $E = E^s \oplus E^u$ が存在して, $L_s := L|_{E^s}$, $L_u := L|_{E^u}$ は $\|L_s\| < 1$, $\|L_u^{-1}\| > 1$ を満たす.[1] $a := \max\left\{\|L_s\|, \|L_u^{-1}\|\right\} < 1$, X には

$$\|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad x \in E^s,\ y \in E^u$$

なるノルムが与えられているとする．任意の $\mu > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
C^0_*(E) &= \{f : E \to E \mid f \text{ uniformly continuous, uniformly bounded }\},\\
\mathcal{L}_\mu(L) &= \left\{\Lambda = L + \lambda \mid \lambda \in C^0_*(X),\ \sup_x \|\lambda(x)\| < \mu,\ \sup_{x,y} \|\lambda(x) - \lambda(y)\| \le \mu\|x - y\|\right\},\\
\mathcal{H} &= \left\{h = I + g \mid g \in C^0_*(E)\right\}
\end{aligned}$$

を定義する.

十分小さな μ に対して, $\mathcal{L}_\mu(L)$ の元は Lipschitz 同相写像である.

[1] 固有値による特徴付けと作用素ノルムに関する特徴付けで違いが起こらないか心配な人のための補足．$\rho(L) :=$ 固有値の絶対値の上限 (スペクトル半径) とすると, E のノルムの選び方に関わらず $\rho(L) = \lim_{t\to\infty} \|L^t\|^{1/t}$ が成り立つ　(たとえば Rudin (1991, Theorem 10.13))．十分大きな T に対して $\rho(L)^T \simeq \|L^T\|$ なので, どちらの表現を使っても同じ漸近挙動を見ていることになる.

補題 1. $\mu < \|L^{-1}\|^{-1}$ とする．このとき, $\Lambda = L + \lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$ は可逆で, Λ^{-1} は *Lipschiz* 連続.[2]

証明. まず可逆性を示す．任意の $y \in E$ について, $\Lambda(x) = Lx + \lambda(x) = y$ なる x が一意的に存在することを示したい．まず, L は可逆なので, ある x_0 が一意に存在して $Lx_0 = y$ となる．したがって,

$$Lx + \lambda(x) = Lx_0$$

が一意に解を持つことを示せばよい．変形すると,

$$x = x_0 - L^{-1}\lambda(x)$$

であるから, 求めたい x は写像 $f(x) = x_0 - L^{-1}\lambda(x)$ の不動点であることが分かる.

$$\begin{array}{rcl} \|f(x') - f(x'')\| & = & \|L^{-1}\lambda(x') - L^{-1}\lambda(x'')\| \\ & \leq & \|L^{-1}\|\|\lambda(x') - \lambda(x'')\| \\ & \leq & \mu\|L^{-1}\| \cdot \|x' - x''\| \end{array}$$

$\mu\|L^{-1}\|^{-1} < 1$ を仮定しているので, f は縮小写像であり, 不動点が一意に存在する．したがって, Λ は可逆である.

次に, Λ^{-1} が Lipschitz 連続であることを示す.

$$\begin{array}{rcl} \|x' - x''\| & = & \|L^{-1}Lx' - L^{-1}Lx''\| \\ & \leq & \|L^{-1}\|\|Lx' - Lx''\| \end{array}$$

より,

$$\|Lx' - Lx''\| \geq \|L^{-1}\|^{-1}\|x' - x''\|.$$

また,

$$\begin{array}{rcl} \|\Lambda(x') - \Lambda(x'')\| & = & \|Lx' + \lambda(x') - Lx'' - \lambda(x'')\| \\ & \geq & \|L^{-1}\|^{-1}\|x' - x''\| - \|\lambda(x') - \lambda(x'')\| \\ & \geq & (\|L^{-1}\|^{-1} - \mu)\|x' - x''\|. \end{array}$$

$\|L^{-1}\|^{-1} - \mu > 0$ なので

$$\|x' - x''\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \mu}\|\Lambda(x') - \Lambda(x'')\|.$$

したがって,

$$\|\Lambda^{-1}(x') - \Lambda^{-1}(x'')\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \mu}\|x' - x''\|.$$

[2] この証明は, Zehnder (2010), Proposition II.2 の証明を参考にした.

$\square$

定理 2. 任意の $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$ に対してある $h \in \mathcal{H}$ が存在して, $h \circ \Lambda = \Lambda' \circ h$ が成り立つ.

証明. 方程式 $h \circ \Lambda = \Lambda' \circ h$ に $h = I + g$, $\Lambda = L + \lambda$, $\Lambda' = L + \lambda'$, $g \in C^0_*(E)$ を使って展開してやると

$$
\begin{aligned}
&h \circ \Lambda = \Lambda' \circ h \\
&\quad \Leftrightarrow (I+g) \circ \Lambda = (L + \lambda') \circ (I+g), \\
&\quad \Leftrightarrow g \circ \Lambda = L + L \circ g + \lambda' \circ (I+g) - (L+\lambda) \\
&\quad \Leftrightarrow g = \left[L \circ g + \lambda' \circ (I+g) - \lambda \right] \circ \Lambda^{-1}.
\end{aligned}
$$

E^s と E^u に分けると,

$$
\begin{aligned}
g_s &= \left[L_s \circ g_s + \lambda'_s \circ (I+g) - \lambda_s \right] \circ \Lambda^{-1} \qquad (1) \\
g_u &= \left[L_u \circ g_u + \lambda'_u \circ (I+g) - \lambda_u \right] \circ \Lambda^{-1}
\end{aligned}
$$

別の同値な変形を考える.

$$
\begin{aligned}
&h \circ \Lambda = \Lambda' \circ h \\
&\quad \Leftrightarrow (I+g) \circ \Lambda = (L + \lambda') \circ (I+g), \\
&\quad \Leftrightarrow L \circ g = (I+g) \circ \Lambda - L - \lambda' - \lambda' \circ g \\
&\quad \Leftrightarrow L \circ g = g \circ \Lambda + \lambda - \lambda' \circ (I+g) \\
&\quad \Leftrightarrow g = L^{-1} \circ \left[g \circ \Lambda + \lambda - \lambda' \circ (I+g) \right].
\end{aligned}
$$

E^s と E^u を分けて考えると,

$$
\begin{aligned}
g_s &= L_s^{-1} \circ \left[g_s \circ \Lambda + \lambda_s - \lambda'_s \circ (I+g) \right] \\
g_u &= L_u^{-1} \circ \left[g_u \circ \Lambda + \lambda_u - \lambda'_u \circ (I+g) \right] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$ でパラメトライズされた写像の族

$$
T_{\Lambda,\Lambda'}(g) : \begin{bmatrix} g_s \\ g_u \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} [L_s \circ g_s + \lambda'_s \circ (I+g) - \lambda_s] \circ \Lambda^{-1} \\ L_u^{-1} \circ [g_u \circ \Lambda + \lambda_u - \lambda'_u \circ (I+g)] \end{bmatrix}
$$

は一様な Lipschitz 定数をもつ縮小写像である. [確認せよ: T は完備距離空間上の写像となっ

ている] なぜなら,

$$
\begin{aligned}
&\left\|T_{\Lambda,\Lambda'}(g') - T_{\Lambda,\Lambda'}(g'')\right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} [L_s \circ (g'_s - g''_s) + \lambda'_s \circ (g' - g'')] \circ \Lambda^{-1} \\ L_u^{-1} \circ [(g'_u - g''_u) \circ \Lambda - \lambda'_u \circ (g' - g'')] \end{bmatrix} \right\| \\
&\leq \max \begin{bmatrix} \|L_s\| \cdot \|(g'_s - g''_s) \circ \Lambda^{-1}\| + \|\lambda'_s \circ (g' - g'') \circ \Lambda^{-1}\| \\ \|L_u^{-1}\| \cdot [\|(g'_u - g''_u) \circ \Lambda\| + \|\lambda'_u \circ (g' - g'')\|] \end{bmatrix} \\
&\leq \max \begin{bmatrix} a\|g'_s - g''_s\| + \mu\|g' - g''\| \\ a\left[\|g'_u - g''_u\| + \mu\|g' - g''\|\right] \end{bmatrix} \\
&\leq (a + \mu)\|g' - g''\|.
\end{aligned}
$$

したがって $T_{\Lambda,\Lambda'}$ は不動点 $g = g_{\Lambda,\Lambda'}$ をもつ. $g_{\Lambda,\Lambda'}$ は (Λ, Λ') の連続写像である. また, $h_{\Lambda,\Lambda'} = I + g_{\Lambda,\Lambda'}$ の逆写像が Lipschitz 連続であることは補題 1 から従う. □

系 3. 任意の $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$ に対してある $h \in \mathcal{H}$ が存在して, $L = h \circ \Lambda \circ h^{-1}$ が成り立つ.

2. 最適軌道の局所理論

瞬時効用 u を 2 階連続微分可能, 厳密な凹関数 [3] であると仮定する. 経路 $k = (k_t)$ がラムゼー問題

$$
\max_{(k_t,k_{t+1})\in\mathbb{D}} \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k_t, k_{t+1}), \tag{3}
$$

の解 (内点解) であるならば, 最適性のための必要条件

$$
D_2 u(k_{t-1}, k_t) + \rho D_1 u(k_t, k_{t+1}) = 0, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{4}
$$

を満たさなければならない. この条件を Euler 条件とか, Euler 方程式とよぶ. Euler 条件が最適性の必要条件であることのは次のノートできちんと解説する予定であるが, 直感的には有限次元 (あるいは 1 変数) の場合と変わりはないのでここでは一旦これを認めてほしい: ある点 ($k = (k_t)$) で関数が最大化されているなら, その点にどんな摂動を加えても目的関数を増加させることはできないのだから, $k \to k'$, $k'_t \neq k_t$, $k'_s = k_s$, $s \neq t$ という摂動を加えても目的関数を増加させることはできない.

以下では最適な長期均衡 (平衡点) が存在して $(k_\infty, k_\infty, \ldots)$ と表されているとする. すなわち,

$$
D_2 u(k_\infty, k_\infty) + \rho D_1 u(k_\infty, k_\infty) = 0
$$

が成り立つ $(k_\infty, k_\infty) \in \operatorname{int}\mathbb{D}$ が存在するとする. (k_∞, k_∞) の近傍を初期値 $(k_0, k_1) \in B((k_\infty, k_\infty), \epsilon)$ とする実行可能な $k = (k_t)_{t=0}^{\infty}$ が Euler 条件を満たす場合に, $t \to \infty$ で

[3] 定義!!!!

の挙動を調べよう．

2.1. 特性根の分布

Euler 方程式 (4) は k_{t-1}, k_t, k_{t+1} の関係を定める陰関数である．もし陰関数定理が適用できて，

$$x_{t+1} = F(x_{t-1}, x_t) \tag{5}$$

を満たす F の存在を保証できれば $\mathbb{D}$ 上の力学系が定まる．陰関数定理によれば，k_{t+1} を陽関数表示できるための十分条件は $D_{12}u(k_\infty, k_\infty)$ が可逆で $D_{12}u(k_\infty, k_\infty)^{-1}$ が連続というものだ．$D_{12}u(k_\infty, k_\infty)$ は行列なので可逆なら逆も連続である．したがって可逆性だけ仮定すれば十分である．以下これを仮定しよう.[4] 陰関数定理により (k^*, k^*) の適当な近傍 $U \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ と連続微分可能な写像 $F : U \to \mathbb{R}^n$ が存在して式 (5) を満たす．この F によって相空間上の力学系

$$\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_t \end{bmatrix} \mapsto G(x_{t-1}, x_t) = \begin{bmatrix} x_t \\ F(x_{t-1}, x_t) \end{bmatrix},$$

が定まる．対応する Jacobi 行列 (線形近似) は

$$DG = \begin{bmatrix} O & I \\ D_1F(k^*, k^*) & D_2F(k^*, k^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & I \\ -\left(\rho B\right)^{-1} B^\top & -\left(\rho B\right)^{-1}\left(C + \rho A\right) \end{bmatrix},$$

ただし $A := D_{11}u(k^*, k^*) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B := D_{12}u(k^*, k^*) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C := D_{22}u(k^*, k^*) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ここで，$B = D_{12}u(k^*, k^*)$ の可逆性が仮定されていることに注意せよ．u の 2 階連続微分可能性より A, C は対称行列となる.[5]

Jacobi 行列の固有値 λ は次の特性方程式を解く:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I & -I \\ \left(\rho B\right)^{-1} B^\top & \lambda I + \left(\rho B\right)^{-1}\left(C + \rho A\right) \end{bmatrix} = 0. \tag{6}$$

事実 4. $\lambda \neq 0$.

[4] 応用上 $D_{12}u(k_\infty, k_\infty)$ が非可逆で後ろ向きの力学系 $k_{t-1} = \tilde{F}(k_{t+1}, k_t)$ を分析しなければならないケースもありえるが，この講義では扱わない．

[5] Rudin (1976), Theorem 9.41 とその Corollary.

証明. 仮に $\lambda = 0$ であるとすれば,

$$\begin{aligned}
0 &= \det \begin{bmatrix} O & -I \\ (\rho B)^{-1} B^{\top} & (\rho B)^{-1} (C + \rho A) \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} (\rho B)^{-1} B^{\top} & (\rho B)^{-1} (C + \rho A) \\ O & -I \end{bmatrix} \\
&= -\det[(\rho B)^{-1} B^{\top}] \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

定理 12 より

$$\det \left[\lambda^2 + (\rho B)^{-1} (C + \rho A) \lambda + (\rho B)^{-1} B^{\top} \right] = 0$$

さらに $\det B \neq 0$ により, これは

$$\det \left[(\rho B) \lambda^2 + (C + \rho A) \lambda + B^{\top} \right] = 0$$

と同値である. □

定理 5. λ が特性根であれば, $(\rho\lambda)^{-1}$ も特性根である.

証明. λ を特性根とする. すなわち,

$$\det \left[(\rho B) \lambda^2 + (C + \rho A) \lambda + B^{\top} \right] = 0.$$

このとき,

$$\begin{aligned}
&\det \left[\rho B \left(\frac{1}{\rho\lambda} \right)^2 + (C + \rho A) \left(\frac{1}{\rho\lambda} \right) + B^{\top} \right] \\
&= \det \left[B \frac{1}{\rho\lambda^2} + (C + \rho A) \left(\frac{1}{\rho\lambda} \right) + B^{\top} \right] \\
&= (\rho\lambda^2)^{-n} \det \left[B + (C + \rho A) \lambda + B^{\top} (\rho\lambda^2) \right] \\
&= (\rho\lambda^2)^{-n} \det \left[B + (C + \rho A) \lambda + (\rho B^{\top}) \lambda^2 \right] \\
&= (\rho\lambda^2)^{-n} \det \left[B^{\top} + (C + \rho A) \lambda + (\rho B) \lambda^2 \right]^{\top} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

定理 5 が言っていることは, 安定 (中心) 固有値 $0 < |\lambda| \leq 1$ に対応する不安定な固有値 $(\rho\lambda)^{-1}$ が必ず現れるということである: $\left| (\rho\lambda)^{-1} \right| > \rho^{-1} \geq 1$. 一方, 不安定な固有値 $|\lambda| > 1$ に対応して現れる固有値は必ずしも安定であるとは限らない: $\left| (\rho\lambda)^{-1} \right| < \rho^{-1}$. すなわち

$0 < \left|(\rho\lambda)^{-1}\right| \leq 1$ であるかもしれないし, $1 < \left|(\rho\lambda)^{-1}\right| < \rho^{-1}$ であるかもしれない. 長期均衡近傍の力学系は必ず不安定になる.

定理 6. *λ が特性根であれば $|\lambda| \neq \sqrt{1/\rho}$.*[6]

証明. 特性根 λ が $\lambda\bar{\lambda} = 1/\rho$ を満たすと仮定する. $\xi \neq 0$ を次の方程式の解とする:

$$\left[(\rho B)\,\lambda^2 + (C + \rho A)\,\lambda + B^\top\right]\xi = 0.$$

両辺に $\bar{\lambda}$ を掛けて, 左から $\xi^\top$ を掛けると

$$\xi^\top\left[B\lambda + (\frac{1}{\rho}C + A) + B^\top\bar{\lambda}\right]\xi = \begin{bmatrix}\xi \\ \lambda\xi\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}A & B \\ B^\top & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi \\ \lambda\xi\end{bmatrix} = 0.$$

Hesse 行列 $\begin{bmatrix}A & B \\ B^\top & C\end{bmatrix}$ は負定値行列なので,[7]

$$\begin{bmatrix}\xi \\ \lambda\xi\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix}A & B \\ B^\top & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi \\ \lambda\xi\end{bmatrix} < 0.$$

とならなければならない. これは矛盾である. □

系 7. *ρ が十分 1 に近いとき, 力学系 G は双曲型である.*

証明. 定理 6 において $\rho = 1$ とすれば, $|\lambda| = 1$ なる固有値は存在しないことが分かる. 固有多項式 (式 (6) の左辺) は $|\lambda| = 1$ なる λ に対してゼロではない値を取る. 固有多項式は ρ の連続関数なので, 1 に十分近い ρ でもゼロになりえない. □

3. 1 部門モデルの例

簡単な 1 部門モデルを使って上の結果を確認する. $A > 0$, $0 < \alpha < 1$ として, モデルを

$$f(k) = Ak^\alpha, \quad U(c) = \log c, \quad u(x, y) = U(f(x) - y)$$

と特定化する. Euler 方程式は

$$\begin{aligned}
0 &= D_2u(k_{t-1}, k_t) + \rho D_1u(k_t, k_{t+1}) \\
&= -U'(f(k_{t-1}) - k_t) + \rho U'(f(k_t) - k_{t+1})f'(k_t) \\
&= \frac{-1}{Ak_{t-1}^\alpha - k_t} + \frac{\rho\alpha Ak_t^{\alpha-1}}{Ak_t^\alpha - k_{t+1}}.
\end{aligned}$$

[6] Santos (1991, Lemma 3.9 (b))

[7] 証明!!!

k_{t+1} について解くと

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= F(k_{t-1}, k_t) \\ &= (1+\rho\alpha)Ak_t^{\alpha} - \rho\alpha A^2 k_{t-1}^{\alpha} k_t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

長期均衡を $k_\infty = k_{t-1} = k_t = k_{t+1}$ とすると,

$$k_\infty = (1+\rho\alpha)Ak_\infty^{\alpha} - \rho\alpha A^2 k_\infty^{2\alpha-1}$$

すなわち

$$(\rho\alpha A k_\infty^{\alpha-1} - 1)(Ak_\infty^{\alpha-1} - 1) = 0$$

の解である. k_∞ は実行可能な内点解でなければならないので,

$$Ak_\infty^{\alpha} - k_\infty = (Ak_\infty^{\alpha-1} - 1)k_\infty > 0$$

より $k_\infty \neq A^{\frac{1}{1-\alpha}}$. 興味のある唯一の長期均衡は

$$k_\infty = (\rho\alpha A)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

力学系の Jacobi 行列は

$$\begin{aligned} DG(k_\infty, k_\infty) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\rho\alpha^2 A^2 k_\infty^{2\alpha-2} & (1+\rho\alpha)\alpha A k_\infty^{\alpha-1} - \rho\alpha(\alpha-1)A^2 k_\infty^{2\alpha-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\rho} & \frac{\rho\alpha^2+1}{\rho\alpha} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

これが平衡点 (k_∞, k_∞) 近傍での力学系を線形近似したものになっている. 特性方程式は

$$\lambda^2 - \frac{\rho\alpha^2+1}{\rho\alpha}\lambda + \frac{1}{\rho} = 0$$

となる. 2 次方程式の性質から, 2 つの解 λ_+, λ_- の間には

$$\lambda_+\lambda_- = \frac{1}{\rho}$$

という関係があるので, 2 次方程式を解くまでもなく定理 5 の成立が確認できる.

3.1. 数値例

$A = 1.1$, $\alpha = 0.4$, $\rho = 0.9$ として位相図を描いたものが下の図である. 2 つの点線 (不変部分空間) と破線 (45° 度線) が交わる点が長期均衡 k_∞ に対応している. 長期均衡に向かう赤色の矢線で示された軌道が安定多様体上のダイナミクスを表し, 長期均衡から外に向かって

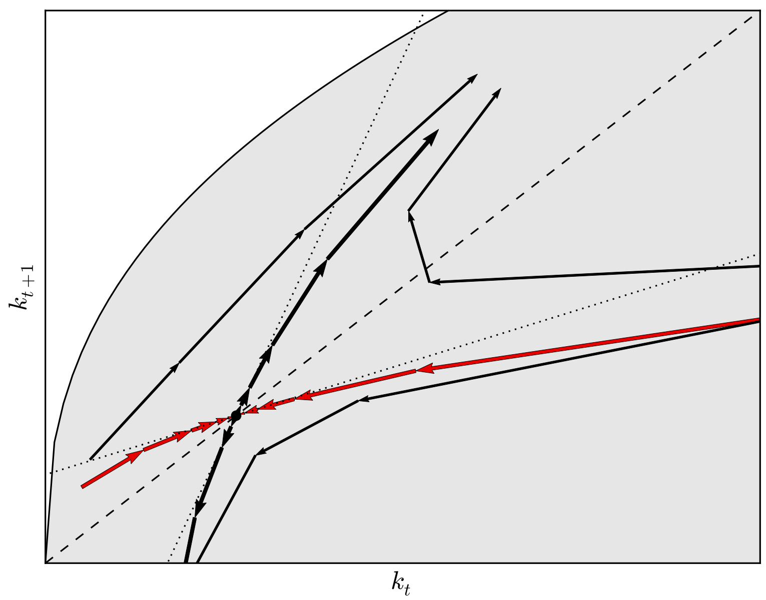

図 1: ラムゼーモデルのダイナミクス

湧き出している黒色の矢印が不安定多様体上のダイナミクスを表している．それぞれが点線で描かれた直線 (固有ベクトルの方向に引かれている) と接している．この長期均衡の周りには 1 次元の安定多様体と 1 次元の不安定多様体が存在することが確認できる．このような不動点は鞍点と呼ばれる．

問題 8. Python+Matplotlib を用いて図 1 を再現してください．(.... あるいはもっとよい図を描いてください).

3.2. 安定性

定理 5 と上の数値例から判明したこと, 未だに判明していないことをまとめておこう．

(k_t, k_{t+1}) が従う拡張された力学系 (「相空間」(k_t, k_{t+1}) 上の力学系) の長期均衡は必ず不安定である．典型的なケースでは鞍点となる．荒く言ってしまえば, ρ が十分 1 に近いようなケースでは安定固有値が現れやすく, 逆に ρ が 0 に近づくと安定固有値は現れにくくなる．固有値の分布と割引因子の関係はターンパイク性, カオス的振る舞いを分析する基本になるので, 十分に理解しておいてほしい．

注意しておかなければいけないことは, 相空間上の力学系は最適動学 $k_t \mapsto k_{t+1}$ を完全に特徴付けているわけではないということである．図 1 によって読み解けるように, 初期値 k_0 が与えられたとき, k_1 が安定多様体上 (赤い矢線の経路) に選ばれるならば均衡動学

$$k_t \mapsto k_{t+1}$$

は安定的な漸近挙動 (長期均衡への収束) を示す．一方, 安定多様体の外に k_1 が選ばれるならば均衡動学は不安定な挙動 (発散) を示す．相空間上の力学系は経路を定めるために $\mathbb{R}^{2n}$

個の情報を必要としているにも関わらず, 初期値として与えられた k_0 は $\mathbb{R}^n$ 個の情報しかもっていないためにこのような不決定的な状況が発生している. 最適経路を定めるためには Euler 条件以外にも情報がまだ必要である.

A. 行列公式

$\mathbb{K}^{m\times n}$ を $m\times n$ 行列の全体とする.

$\sigma:\{1,\ldots,d\}\to\{1,\ldots,d\}$ が全単射であるとき, σ は $\{1,\ldots,d\}$ 上の置換であるいう.

$$(\sigma(1),\ldots,\sigma(d))$$

は $(1,\ldots,d)$ を並べ替えたものになっていることから明らかなように, $\{1,\ldots,d\}$ 上の置換は $d!$ 個ある. σ_1,σ_2 が共に置換であるとき, $\sigma_2\circ\sigma_1$ はまた置換である. これを σ_2 と σ_1 の積という. ある $i,j\in\{1,\ldots,d\}$ があって,

$$\sigma(i)=j,\quad \sigma(j)=i,\quad \sigma(k)=k,\ k\neq i,j$$

が成り立つとき σ は互換であるという. 互換は 2 つの数字を入れ替える特別な置換である. すべての置換は互換の積として表現できる. 偶数個の互換の積として書ける置換を偶置換とよび, 奇数個の互換の積として書ける置換を奇置換とよぶ. 互換の積の表現は一意的ではないが, 表現によらず奇偶が定まることがしられており, 関数

$$\mathrm{sgn}\sigma=\begin{cases}+1 & \text{if } \sigma \text{ is even}\\ -1 & \text{if } \sigma \text{ is odd}\end{cases}$$

が定まる.

定義 9. $M=(M_{ij})\in\mathbb{K}^{d\times d}$ とする. M の行列式は次のように定義される.

$$\det M := |M| := \sum_{\sigma}\mathrm{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{d}M_{i\sigma(i)}.$$

和は $\{1,\ldots,d\}$ 上のすべての置換について取る.

定理 10. $M\in\mathbb{K}^{d\times d}$ とする. 任意の $c\in\mathbb{K}$ に対して

$$|cM|=c^d\,|M|\,.$$

証明. 定義から直ちに従う. □

定理 11. $|M|=\left|M^\top\right|$.

証明. $\mathrm{sgn}\sigma^{-1} = \mathrm{sgn}\sigma$ に注意せよ.

$$\begin{aligned}|M| = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{d} M_{i\sigma(i)} &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{d} M_{\sigma^{-1}(i)i} \\ &= \sum_{\tau} \mathrm{sgn}\tau \prod_{i=1}^{d} M_{\tau(i)i} = |M^{\top}|\end{aligned}$$

□

定理 12. $M_1 \in \mathbb{K}^{d_1 \times d_1}$, $M_2 \in \mathbb{K}^{d_1 \times d_2}$, $M_3 \in \mathbb{K}^{d_2 \times d_1}$, $M_4 \in \mathbb{K}^{d_2 \times d_2}$ とする. $\det M_1 \neq 0$ のとき

$$\det \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} = \det(M_1)\det(M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2).$$

証明. 次の等式から従う.

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -M_1^{-1} M_2 \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & O \\ M_3 & M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2 \end{bmatrix}.$$

□

参考文献

Levhari, D. and N. Liviatan (1972): "On stability in the saddle-point sense," *Journal of Economic Theory*, 4, 88–93.

Pugh, C. C. (1969): "On a theorem of P. Hartman," *American Journal of Mathematics*, 91, 363–367.

Rudin, W. (1976): *Principle of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, third ed.

——— (1991): *Functional Analysis*, McGraw Hill, second ed.

Santos, M. S. (1991): "Smoothness of the policy function in discrete time economic models," *Econometrica*, 59, 1365–1382.

Zehnder, E. (2010): *Lectures on Dynamical Systems*, European Mathematical Society.