経済動学・講義ノート 1

神戸大学大学院経済学研究科
2015 年度前期

担当: 佐藤健治 mail@kenjisato.jp

2015 年 4 月 6 日

1. Big Picture

この講義では, 特に断りのない限りラムゼータイプの既約型資本蓄積モデルを扱う. 離散時間問題を決定論的な文脈で取り扱う. すなわち, 最大化問題 (あるいは変分問題)

$$\sup \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} u_t(k_t, k_{t+1}) \mid (k_t, k_{t+1}) \in \mathbb{D}_t \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+,\ t = 0, 1, \dots,\ k_0 : \text{given} \right\}$$

の解 $k = (k_t)_{t=0}^{\infty}$ が持つ動学的性質について学ぶ. 簡単化のため多くの場合で $u_t(\cdot,\cdot) = \rho^t u(\cdot,\cdot)$ と書けるモデルに限定して分析する.

「動学的」性質という表現によって意図されていることは k_t が時間 t の経過に伴ってどのような挙動を示すかを調べるということである. 動学的問題の主要なテーマには次のようなものがある.

- $t \to \infty$ の極限で k_t はどのように振る舞うか?
  - 収束? — どこに?
  - 振動? — 周期的? 非周期的?
  - 発散?
- 初期条件の大小関係がその後の成長経路にどのような影響をおよぼすか? [単調比較動学]
  - $k_0 \geq k_0'$ が必ず $k_1 \geq k_1'$ を導くのはどのようなケースか?
  - あるいは, $k_0 > k_0'$ が $k_1 < k_1'$ を導くような経済モデルは存在するか?
- 初期条件のわずかな摂動がその後の成長経路にどのような影響をおよぼすだろうか?
  - 摂動に対する反応は不連続的だろうか? 連続的だろうか? もし連続的であればそれは微分ができるほどに滑らかだろうか? [比較動学]

– 摂動の影響は長期的には失われるだろうか? [安定性]

– あるいは摂動は長期的に拡大していくだろうか? [カオス]

2. 既約型モデルについて

対象になっている資本蓄積モデルについて, 既約型効用関数 u_t の背後にある経済学的な解釈をいくつか与えておこう.

例 **1.** 1 部門モデル

無限期間生きる代表的個人が各期の瞬時的効用をそれぞれ現在時点で評価し, その総和を最大化するように消費計画を立てるとしよう. 計画問題は 0 期の期末 (初期時点) に解かれる. この時点では財 (資本であり消費財) を k_0 の量だけ保有している. $t-1$ 期の期末資本 $= t$ 期の期首資本は生産要素として利用され $f(k_{t-1})$ が算出される. これが消費 $c_t \geq 0$ と投資 $k_t \geq 0$ に分配されるので, $c_t + k_t \leq f(k_{t-1})$ が成り立たなければならない.[1] なお, $f(k_t)$ は t 期の期首に一括で産出されると考えてもよいし, 1 期の長さが経過した期末に産出されるけれども産出見込みをもって消費が可能になるような (金融のある) 状況を考えてもよいし, 時間を掛けて少しずつ産出されたものを少しずつ食べている状況を考えてもよい. 表 1 では, これらの変数間の関係をまとめている.

この代表的個人は c_t の消費から瞬時効用 $U(c_t)$ を得る. 瞬時効用は割引率 $\rho \in (0,1)$ で割り引かれ, 計画時点での効用に加法的に反映される. すなわち, 消費の系列 $c = (c_t)_{t=1}^{\infty}$ に対して, 効用 $\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} U(c_t)$ を得る. したがって, 制約条件を加味すると, 代表的個人の解くべき最大化問題は次のものである.

$$\sup \left\{ \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} U(c_t) \;\middle|\; 0 \leq c_t \leq f(k_{t-1}) - k_t,\ k_t \geq 0,\ t = 1, 2, \ldots,\ k_0 :\ \text{given} \right\}. \tag{1}$$

次の 2 変数関数を定義しよう:

$$u(x, y) = \max \{ U(c) \mid c \leq f(x) - y \}.$$

表 1: 1 部門モデルの時系列

期間	期首資本	当期産出量	当期消費量	期末資本
0	—	—	—	k_0
1	k_0	$f(k_0)$	c_1	$k_1 \leq f(k_0) - c_1$
2	k_1	$f(k_2)$	c_2	$k_2 \leq f(k_1) - c_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	k_{t-1}	$f(k_t)$	c_t	$k_{t+1} \leq f(k_t) - c_t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

[1] 捨てることが望ましい場合には, $c_t + k_t < f(k_t)$ ということもあるかもしれないので, $c_t + k_t = f(k_t)$ をアプリオリには仮定できない.

x は期首資本, y は期末資本を表している．すなわち, $u(x,y)$ は期首に x を保有し, 期末に y を残す場合に, その期間内に最大限達成できる効用を表している．定義域は次のように定まる．

$$\mathbb{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; \exists c \geq 0:\; c \leq f(x) - y\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; y \leq f(x)\right\}$$

U の単調性を仮定すれば $c_t = f(k_{t-1}) - k_t$ 以外で最大値を達成できないことは明らかであるから, 計画問題 (1) は

$$\sup\left\{\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} u(k_{t-1}, k_t) \;\middle|\; (k_{t-1}, k_t) \in \mathbb{D},\; t = 1, 2, \ldots,\; k_0:\text{ given}\right\} \tag{2}$$

と同値な問題である．すなわち, 2 つの計画問題は最大値が一致し, 一方の最適解からもう一方の最適解を導出できる．たとえば (2) の解である最適資本経路 $(k_t)_{t=0}^{\infty}$ を得れば, 最適消費計画 $c_t = f(k_{t-1}) - k_t$ を導出できる．

最後に, u の形状を確認しておこう． $x' \geq x''$ かつ $(x'', y) \in \mathbb{D}$ であれば $f(x') - y \geq f(x'') - y \geq 0$ より $(x', y) \in \mathbb{D}$ である．さらに,

$$u(x'', y) = \max_{c \leq f(x'') - y} U(c) \leq \max_{c \leq f(x') - y} U(c) = u(x', y)$$

も分かる．同様にして, $y' \leq y''$ かつ $(x, y'') \in \mathbb{D}$ であれば $f(x) - y' \geq f(x) - y'' \geq 0$ より $(x, y') \in \mathbb{D}$. $u(x, y'') \leq u(x, y')$ が成り立つ． $\square$

例 1 では資本減耗については考えていない. 次の例でこれを導入してみよう．

例 **2.** 1 部門モデル (irreversible investment のケース)

期首資本 k_{t-1} を生産要素として投入すると財が $f(k_{t-1})$ だけ産出され当期に消費できることに加えて, 投入した資本 k_{t-1} の一部— dk_{t-1} とする—は次期に繰り越すこともできるケースを考える．もちろん $0 \leq d \leq 1$ である． $(1-d)$ は減耗率と呼ばれる．

財を自由に処分できるケースでは例 1 の場合となんら変わらない．例 1 の $f(k_t)$ が $f(k_t) + dk_t$ に置き換わっただけである．通常, 例 1 は減耗率が 1 であると称されることが多いけれども, 生産関数 f が保存技術を含めていると考えてもよかったのであるから (f にはなんらの仮定もまだ置いていなかったので), これらに本質的な違いはない．

しかし, 財を自由に処分できないケースでは事情が少し変わってくる．[2] 望むと望まざるとにかかわらず投入要素の一部が次期に持ち越されるので, 期末資本の下限が 0 より大きくなるという形で影響を与えることになる (表 2). 制約集合として

$$\mathbb{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \;\middle|\; dx \leq y \leq f(x) + dx\right\}$$

を考えることになる． $\square$

[2] 一旦, 資本が形成されると元に戻せないという意味で, irreversible investment のモデルといわれる．1 部門モデルの場合に正当化しようとすると, 残った資本はすぐには食べられないという想定が必要かもしれない (?)

表 2: 1 部門モデルの時系列 (財を自由に処分できない)

期間	期首資本	当期産出量	当期消費量	期末資本
0	—	—	—	k_0
1	k_0	$f(k_0)$	c_1	$dk_0 \leq k_1 \leq f(k_0) + dk_0 - c_1$
2	k_1	$f(k_2)$	c_2	$dk_1 \leq k_2 \leq f(k_1) + dk_1 - c_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t	k_{t-1}	$f(k_t)$	c_t	$dk_t \leq k_{t+1} \leq f(k_t) + dk_t - c_t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

表 3: 多部門モデルのスナップショット

生産要素＼部門	消費財部門	資本財 $j = 1, \ldots, n$	要素制約
資本財 $i = 1, \ldots, n$	k^{i0}	k^{ij}	$\sum_{j=0}^{n} k^{ij} \leq k_{t-1}^{i}$
労働	l^0	l^j	$\sum_{j=0}^{n} l^j \leq 1$
技術制約	$c_t \leq f^0(k^{10}, \ldots, k^{n0}, l^0)$	$k_t^j \leq f^j(k^{1j}, \ldots, k^{nj}, l^j)$	—

例 **3.** 多部門モデル

経済に 1 個の消費財部門 (第 0 部門) と n 個の資本財部門とが存在するとしよう. 資本と労働は部門間を自由に移動できるとする (生産要素の移動が自由に移動できる程度に 1 期間を長く設定していると考えてもよい). 労働供給は毎期 1 と基準化する. t 期の期首に存在する資本財 $k_{t-1} = (k_{t-1}^1, \ldots, k_{t-1}^n)$ と労働 1 を各部門に分配し, 当期の消費財 c_t と資本財 (あるいは投資財) $k_t = (k_t^1, \ldots, k_t^n)$ が生産される. 第 j 財 ($j = 0, 1, \ldots, n$) の生産のために投入される第 i 財 ($i = 1, \ldots, n$) の量を k^{ij} とし, 投入される労働を l^j とする. 生産要素制約により,

$$\sum_{j=0}^{n} k^{ij} \leq k_{t-1}^{i}, \quad \sum_{j=0}^{n} l^i \leq 1 \tag{3}$$

が成り立たなければならない. また, 第 j 部門の生産関数を f^j とすれば

$$c_t \leq f^0(k^{10}, \ldots, k^{n0}, l^0), \tag{4}$$
$$k_t^j \leq f^j(k^{1j}, \ldots, k^{nj}, l^j), \quad j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

が技術制約として要請される. これらをまとめたものが表 3 である.

消費財の消費 c によってのみ効用 $U(c)$ が得られると想定すれば, 瞬時効用は

$$u(k_{t-1}, k_t) = \max \left\{ U(c_t) \;\middle|\; \exists k^{ij}, l^j \in \mathbb{R}_+ \text{ such that (3), (4) and (5) hold. } \right\}$$

とできる. 定義域は

$$\mathbb{D} = \left\{ (k_{t-1}, k_t) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; \exists c_t, k^{ij}, l^j \in \mathbb{R}_+ \text{ such that (3), (4) and (5) hold. } \right\}.$$

□

ここまでは, 消費によってのみ効用が得られるケースを扱ってきた. すなわちフロー変数のみから効用が得られる状況であるが, $u(k_{t-1}, k_t)$ という形の既約型効用は (明らかに) より広いクラスのモデルを扱うことができる.

例 **4.** 人的資本蓄積

Stokey et al. (1989, Section 5.8) から, 人的資本の成長モデルを見てみよう. ここでは, k_t が人的資本と解釈される. 生産のために $k_t h_t$ ($h_t \in [0,1]$) の人的資本 (時間) を投じることで, $f(k_t h_t)$ の消費を行うことができる.

労働を行わない $1 - h_t$ の時間で人的資本形成のための活動を行う. $h_t = 1$ (人的資本形成を行わない) であれば人的資本は目減りして, $k_{t+1} = (1-\delta)k_t$ となる. 一方, $h_t = 0$ であれば (すべての時間を人的資本形成にあてる), 次期には $k_{t+1} = (1+\lambda)k_t$ の人的資本が得られる. $0 = \phi(1-\delta)$, $1 = \phi(1+\lambda)$ であるような単調減少関数 ϕ により $h_t = \phi(k_{t+1}/k_t)$ という関係が成り立っているものと仮定する. この場合の瞬時効用は

$$u(k_t, k_{t+1}) = U(f(k_t \phi(k_{t+1}/k_t)))$$

であり, 制約集合は

$$\mathbb{D} = \{(k_t, k_{t+1}) \mid (1-\delta)k_t \le k_{t+1} \le (1+\lambda)k_t\}$$

となる. □

3. 力学系

経済動学系の解説に入る前に基本事項を確認しておこう.

3.1. 定義

$X = \mathbb{R}^m$ に Euclid ノルムを導入する. X_0 を X の閉部分集合とする. X_0 上の離散時間力学系とは写像 $F : X_0 \to X_0$ のことである. X_0 を状態空間とよぶ. 初期状態 (あるいは初期値) $x_0 = x$ が与えられたとき, その後の状態遷移

$$x_{t+1} = F(x_t), \quad t = 0, 1, \ldots$$

が決定する. 通常, t は時間のパラメータとみなす. このシステムには確率的な要因が一切存在せず, 任意の時点における状態がその後の状態遷移を完全に決定するので, このシステムは決定論的力学系とよばれる. 再帰的に写像の繰り返し

$$F^t(x) := F(F^{t-1}(x)), \quad F^0(x) \equiv x$$

を定義すれば, 各時点の状態を

$$x_t = F^t(x_0), \quad t = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

と表すことができる.

$$\{x_t\}_{t=0}^{\infty} = \left\{F^t(x_0)\right\}_{t=0}^{\infty}$$

を, x_0 を初期状態とする軌道とよぶ.

$\bar{x}$ が力学系 F の不動点あるいは平衡点であるとは,

$$\bar{x} = F(\bar{x})$$

が成り立つことをいう. 不動点 $\bar{x}$ が漸近安定あるいは局所漸近安定であるとは, $\bar{x}$ のある δ-近傍 $B(\bar{x},\delta) = \{x \in X_0 \mid \|x-\bar{x}\| < \delta\}$ に含まれる点を初期値とする軌道が $\bar{x}$ に収束することをいう. すなわち,

$$\exists\delta > 0,\ \forall x \in B(\bar{x},\delta): \quad F^t(x) \to \bar{x}$$

が成り立つことをいう. 不動点 $\bar{x}$ が Lyapunov 安定であるとは, 不動点の近傍から出発した軌道が近傍にとどまり続けることをいう. 形式的には

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in B(\bar{x},\delta): \quad F^t(x) \in B(\bar{x},\epsilon),\ t = 0,1,\ldots$$

が成り立つことと定義される. 漸近安定であれば Lyapunov 安定である. Lyapunov 安定でないとき, 不動点は不安定であるという. すなわち,

$$\exists\epsilon > 0,\ \forall\delta > 0,\ \exists x \in B(\bar{x},\delta),\ \exists t: \quad F^t \notin B(\bar{x},\epsilon)$$

が成り立ち, $\bar{x}$ の近傍のどの点を初期値としても軌道は必ず ϵ-近傍の外に出る.

X の部分集合 M が不変多様体であるとは,

$$x \in M \Rightarrow F(x) \in M$$

が成り立つ滑らかな曲面であることをいう. 力学系の定義によると, 不変多様体に制限された力学系 $F: M \to M$ が定義できる. 写像の制限の記号を使って $F|_M$ と書く. 実用上は平衡点 $\bar{x} = F(\bar{x})$ を通る不変多様体に関心がある.

3.2. 線形力学系

力学系 F が線形であるとは, $F: X \to X$ が線形写像であることをいう. F が線形でないとき, 力学系は非線形であるという. 線形力学系

$$x_{t+1} = Fx_t, \quad t = 0,1,\ldots$$

の原点は不動点である. 線形力学系のもっとも重要な性質はいわゆる重ねあわせの原理と呼ばれる性質である. すなわち, $x_0 = \alpha x_0^\alpha + \beta x_0^\beta$ に対する軌道は $\left\{F^t x_0^\alpha\right\}, \left\{F^t x_0^\beta\right\}$ の 1 次結合となり, $x_t = \alpha F^t x_0^\alpha + \beta F^t x_0^\beta$ が成り立つ.

3.2.1. 線形力学系の固有値

原点の安定性は写像 F の固有値によって判断できる.

$\lambda \in \mathbb{C}$ が F の固有値であるとは, ゼロでないベクトル $v_\lambda \in X + jX$ が存在して [3]

$$Fv_\lambda = \lambda v_\lambda$$

が成り立つことをいう. v_λ を固有値 λ に対応する固有ベクトルという.

λ が実数であれば, $v_\lambda \in X$ であり, 部分空間 $\mathrm{span}\,\{v_\lambda\} = \{\alpha v_\lambda \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ はある不変多様体に含まれる (不変部分空間). $|\lambda| < 1$ であればこの部分空間に制限した力学系の原点は漸近安定, $|\lambda| > 1$ であれば不安定である.

λ が実数でない場合には固有ベクトルは X の元ではないが, 同じく固有値である共役複素数 $\bar{\lambda}$ をペアにして考えると不変部分空間を構成できる. $\lambda = a + jb$, $v_\lambda = v_\lambda^R + jv_\lambda^I$, $a, b \in \mathbb{R}$, $v_\lambda^R, v_\lambda^I \in X$ とすると,

$$\begin{aligned} F(v_\lambda^R + jv_\lambda^I) &= (a + jb)(v_\lambda^R + jv_\lambda^I) \\ Fv_\lambda^R + jFv_\lambda^I &= (av_\lambda^R - bv_\lambda^I) + j(bv_\lambda^R + av_\lambda^I) \end{aligned}$$

より,

$$Fv_\lambda^R = av_\lambda^R - bv_\lambda^I, \quad Fv_\lambda^I = bv_\lambda^R + av_\lambda^I$$

が成り立つ. 共役複素数 $\bar{\lambda} = a - jb$ に対応する固有値方程式 $Fv_{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} v_{\bar{\lambda}}$ も同じ連立方程式に帰着することが確認できる. 逆に, この連立方程式から $Fv_\lambda = \lambda v_\lambda, Fv_{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda} v_{\bar{\lambda}}$ を導くこともできる. ここで v_λ^R, v_λ^I が 1 次独立であることに注意せよ. さもなくば, ゼロでない実数 s が存在して $v_\lambda^I = sv_\lambda^R$ が成り立つ. すると, $F(v_\lambda^R + jv_\lambda^I) = (1 + js)Fv_\lambda^R = (a + jb)(1 + js)v_\lambda^R$ より $Fv_\lambda^R = (a + jb)v_\lambda^R$ が成り立つ. したがって $b = 0$ でなければならないが, これは λ が実数でないことに矛盾する. したがって固有値 $\lambda, \bar{\lambda}$ が 2 次元の不変部分空間 $M(\lambda, \bar{\lambda}) = \mathrm{span}\left\{v_\lambda^R, v_\lambda^I\right\} = \left\{x_1 v_\lambda^R + x_2 v_\lambda^I \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$ に対応している. 写像 $F|_{M(\lambda,\bar{\lambda})}$ を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

であり, 行列ノルムを計算すると

$$\max_{x_1^2 + x_2^2 = 1} \left\| \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\lambda| = |\bar{\lambda}|.$$

したがって, この不変部分空間は $|\lambda| < 1$ のときに安定, $|\lambda| > 1$ のときに不安定である.

力学系全体の振る舞い見る上で, まず固有値がすべて相異なると仮定しよう. この場合, 相

[3] j は虚数単位.

異なる m 個の固有値に対応する m 個の固有ベクトルは基底をなすから, スペクトル分解

$$x = \sum_{\lambda} x_\lambda v_\lambda$$

が可能であり, 直和分解 $X = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ は自明なものである. ただし,

$$\begin{aligned} E^s &= \operatorname{span}\{v_\lambda \mid |\lambda| < 1\}, \\ E^c &= \operatorname{span}\{v_\lambda \mid |\lambda| = 1\}, \\ E^u &= \operatorname{span}\{v_\lambda \mid |\lambda| > 1\}. \end{aligned}$$

それぞれ, 安定部分空間, 中心部分空間, 不安定部分空間という. この基底に関して F は対角行列になる.

もう少し抽象的な観点から見てみると, 直和分解というのは, 任意の $x \in X$ に対して一意的な分解

$$\begin{array}{ccccccc} x & = & x^s & + & x^c & + & x^u \\ & & \pitchfork & & \pitchfork & & \pitchfork \\ & & E^s & & E^c & & E^u \end{array}$$

が可能であるということである. F の線形性により 力学系の時間発展をそれぞれ独立な 3 つの成分に分解することができる (重ねあわせの原理). 荒く言って次のように振る舞う.

$$\begin{array}{ccccccc} F^t x & = & F^t x^s & + & F^t x^c & + & F^t x^u \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & ? & & \infty \end{array}$$

このような分解は固有値が重複していたとしても (つまり固有ベクトルで全空間を張れない場合でも) 可能である. Jordan 標準型の理論によれば F を λ に対応する不変部分空間上に制限した写像は, 適当な基底のもとで, 対角行列 λI と冪ゼロ行列の和に分解できる. すなわち, F の表現行列は Jordan 細胞

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

を並べたブロック対角行列になり (m は固有値の重複度によって決まる), 各 Jordan 細胞は,

$$
\begin{aligned}
J_m(\lambda) &= \lambda I_m + J_m(0) \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と分解できるので, $J_m(0)^m = 0$ に注意すると,

$$
\begin{aligned}
J_m(\lambda)^t &= (\lambda I_m + J_m(0))^t \\
&= \lambda^t I_m + \binom{t}{t-1} \lambda^{t-1} J_m(0) + \cdots + \binom{t}{1} \lambda J_m(0)^{t-1} + J_m(0)^t \\
&= \sum_{r=0}^{\min\{t,m-1\}} \binom{t}{t-r} \lambda^{t-r} J_m(0)^r.
\end{aligned}
$$

2 項係数

$$
\binom{t}{t-r} = t \cdot (t-1) \cdots (t-r+2) \cdot (t-r+1)
$$

は t の多項式である. 一方 λ^{t-r} の項は指数的に増大・減少するので, $t \to \infty$ の極限では λ^{t-r} の効果が支配的になる. したがって, $|\lambda| > 1$ の場合に発散し, $|\lambda| < 1$ の場合に収束するという漸近挙動に変わりはない. 基底の選び方などの詳細な議論は比較的高度になるので省略する.

事実 5. *線形力学系 F の固有値がすべて 1 より小さい絶対値を持つとき ($\dim E^s = m$), 原点は漸近安定である. 固有値の絶対値で 1 より大きいものがある ($\dim E^u > 0$) 場合は不安定. その他のケースでは中心部分空間の構造に依存する.*

3.2.2. 自己回帰モデル

$y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ を所与とする. 時系列 $(y_t)_{t=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ が

$$
y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \cdots + a_n y_{t-n}, \quad t = n, n+1, \ldots, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \tag{7}
$$

によって決定されるとき, このモデルを n 次の自己回帰モデルとよぶ.

$$
x_t := \begin{bmatrix} y_t \\ \vdots \\ y_{t-n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n
$$

と定義すれば, 線形力学系

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ \vdots \\ y_{t-n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ \vdots \\ y_{t-n+1} \end{bmatrix} \\
&=: Ax_t
\end{aligned}
$$

を得る. A の固有値は

$$
\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_1 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0
$$

を満たす複素数 λ のことである. 行列 A の特性多項式を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= (\lambda - a_1)\lambda^{n-1} + \det \begin{bmatrix} -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ -1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \\
&= \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \cdots - a_{n-1}\lambda - a_n
\end{aligned}
$$

したがって, 特性方程式は

$$
\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0
$$

である. これは式 (7) を形式的に $y_{t+r-n} = \lambda^r y_{t-n}$, $r = 0, \ldots, n$, と置き換えて y_{t-n} で割ったものと見ることができる. つまり, この λ は変数が指数的に増大・減少するように初期値を選んだとすればどのような変化率が許容されるかを表している. 相異なる n 個の λ が存在する場合には指数的に増大・減少する独立な n 個の初期値が見つかり, そこから出発する指数的に増大・減少する軌道を重ねあわせたものが一般の初期値から出発する軌道となる.

3.3. 非線形力学系の線形化

微分可能な非線形力学系に対して平衡点まわりの線形近似を考えよう. $\bar{x} = F(\bar{x})$ なる平衡点に対して

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} - \bar{x} &= F(x_t) - \bar{x} \\
&= F(x_t) - F(\bar{x}) \\
&= DF(\bar{x})(x_t - \bar{x}) + f(x_t - \bar{x})
\end{aligned}
$$

と変形し, $y_t = x_t - \bar{x}$ とおくと同値な力学系

$$y_{t+1} = DF(\bar{x})y_t + f(y_t)$$

を得られる．ここで, $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ が成り立つ．F のヤコビ行列 $DF(\bar{x})$ の固有値は F の $\bar{x}$ における特性根という．線形力学系 $y \mapsto DF(\bar{x})y$ は次に述べる意味で非線形力学系 $x \mapsto F(x)$ を近似している．

定理 6 (Hartman–Grobman)**.** *$DF(\bar{x})$ は双曲型かつ $\det DF(\bar{x}) \neq 0$, f は $\bar{x}$ で微分可能であるとする．このとき, 連続かつ逆も連続な写像 $h : X \to X$ があって, 原点の近傍で*

$$DF(\bar{x})y + f(y) = h^{-1} \circ DF(\bar{x}) \circ h(y)$$

が成り立つ．

上の定理によれば, 双曲型の不動点の近傍の安定性・不安定性は線形化システムによって決定できる．漸近挙動については次の式を見れば一目瞭然だろう．

$$\begin{aligned} y_t &= (h^{-1} \circ DF(\bar{x}) \circ h)^t (y_0) \\ &= h^{-1} \circ DF(\bar{x})^t \circ h(y_0). \end{aligned}$$

この式を線形力学系の座標変換の公式 (8) と見比べてほしい．Hartman–Grobman の定理によると双曲型の不動点近傍では連続 (一般には非線形) な座標変換 h が存在して, システムの挙動が線形システムと同等 (一方のシステムに対する微小な変化が, もう一方のシステムに対する微小な変化を引き起こす) になる．通常このような性質を 2 つのシステムは位相共役であると表現される．

実は線形化された力学系の安定部分空間 E^s に接し, E^s ど同一の次元をもつ不変多様体 M^s が存在する．これを安定多様体とよぶ．M^s に制限された力学系 $F|_{M^s}$ の平衡点は安定である．また, 不安定部分空間 E^u に接する不安定多様体 M^u の上では時間を反転させた力学系 $F|_{M^u}^{-1}$ が安定となる．

事実 7. 平衡点 $\bar{x}$ のまわりに安定多様体 $M^s(\bar{x})$ と不安定多様体 $M^u(\bar{x})$ が存在し, それぞれ $DF(\bar{x})$ の安定部分空間 E^s と不安定部分空間 E^u と同じ次元をもつ．E^s, E^u の原点を $\bar{x}$ に移動すれば, E^s と M^s, E^u と M^u は $\bar{x}$ で接している．

中心部分空間に接する中心多様体と呼ばれる局所不変多様体は分岐理論で重要な役割を果たす．

A. 行列

A.1. 表現行列

行列とは線型写像を特定の基底について表現したものである．行列の性質や力学系を研究する上で, 背後にある線形写像を意識しておくと役に立つことが多い．　X, Y を $\mathbb{K}$ 上の有限

次元線形空間, $f : X \to Y$ を線形写像とする. X, Y の基底 $\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix}$ を適当に選び順序を固定しておく. $f(v_1), \dots, f(v_n)$ を Y の基底で展開すれば,

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m, \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

と書ける. 簡潔に

$$\begin{bmatrix} f(v_1) & \cdots & f(v_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

と書くことも多い. 係数を並べたもの

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を線形写像 f の表現行列と呼ぶ.

行列とベクトルの積を導出しよう. $x \in X$ を $x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$ と展開すれば $(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K})$, $f(x)$ の Y 上の展開

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 f(v_1) + \cdots + x_n f(v_n) \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + \cdots + (a_{m1}w_1 + \cdots + a_{mn}w_n)w_m \end{aligned}$$

を得る. 同型関係

$$X \simeq \mathbb{K}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}, \quad Y \simeq \mathbb{K}^m = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} : y_1, \dots, y_m \in \mathbb{K} \right\}$$

に注意すれば, 線形写像 $f : X \to Y$ は, 線形写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を次のように定義していることが分かる:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

このように線形写像 $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を定義してやると, 行列とベクトルの積の定義

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

が自然なものであることが分かる. 行列と行列の積についても, ベクトル空間 X, Y, Z, 線形写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を合成した写像 $g \circ f : X \to Z$ に対する行列表示を考えればよい.

A.2. 基底の変更

$\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v'_1 & \cdots & v'_n \end{bmatrix}$ を X の 2 つの基底とする. $v'_1, \ldots, v'_n$ を $v_1, \ldots, v_n$ で展開したときに

$$\begin{aligned} v'_1 &= \phi_{11}v_1 + \cdots + \phi_{n1}v_n, \\ &\vdots \\ v'_n &= \phi_{1n}v_1 + \cdots + \phi_{nn}v_n \end{aligned}$$

と出来たとしよう. 通常, これを

$$\begin{bmatrix} v'_1 & \cdots & v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ & \ddots & \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \Phi$$

と表現する. 基底の変換行列 Φ は全単射である. f の線形性より,

$$\begin{bmatrix} f(v'_1) & \cdots & f(v'_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(v_1) & \cdots & f(v_n) \end{bmatrix} \Phi$$

が成り立つことに注意しておく. 同様に $\begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w'_1 & \cdots & w'_m \end{bmatrix}$ を Y の 2 つの基底として変換行列を Ψ とする.

$$\begin{bmatrix} w'_1 & \cdots & w'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \Psi$$

線形写像 $f : X \to Y$ を基底 $\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix}$ に関して表現した行列を A とすると,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(v'_1) & \cdots & f(v'_n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(v_1) & \cdots & f(v_n) \end{bmatrix} \Phi \\ &= \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix} A\Phi \\ &= \begin{bmatrix} w'_1 & \cdots & w'_m \end{bmatrix} \Psi^{-1}A\Phi \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $f : X \to Y$ を基底 $\begin{bmatrix} v_1' & \cdots & v_n' \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} w_1' & \cdots & w_m' \end{bmatrix}$ に関して表現した行列は $\Psi^{-1}A\Phi$ である. 座標に関する表現も確認しておこう.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \Psi \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{bmatrix}$$

によって線形写像の表現は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{bmatrix} &= \Psi^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \\ &= \Psi^{-1} A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \Psi^{-1} A \Phi \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と変更される.

A.3. 力学系の座標変換

$X \simeq \mathbb{R}^n$ 上の線形力学系

$$x_{t+1} = Fx_t, \quad t = 0, 1, \ldots$$

は基底によらずに定義されるものである. しかし, 通常は行列表現

$$\begin{bmatrix} x_{1,t+1} \\ \vdots \\ x_{n,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{bmatrix} =: A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \end{bmatrix}$$

を考えることの方が多いだろう. この場合は, 標準基底

$$I_n = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

を考えれば前節と同じ議論を展開できる.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

E^s, E^c, E^u に対する基底をそれぞれ $\begin{bmatrix} v_1^s & \cdots & v_{n_s}^s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1^c & \cdots & v_{n_c}^c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1^u & \cdots & v_{n_u}^u \end{bmatrix}$ とする. $X = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ より

$$\begin{bmatrix} v_1^s & \cdots & v_{n_s}^s & v_1^c & \cdots & v_{n_c}^c & v_1^u & \cdots & v_{n_u}^u \end{bmatrix}$$

は X の基底である:

$$x = \sum_{r=1}^{n_s} y_r^s v_r^s + \sum_{r=1}^{n_c} y_r^c v_r^c + \sum_{r=1}^{n_u} y_r^u v_r^u \in X.$$

$F(E^s) \subset E^s$, $F(E^c) \subset E^c$, $F(E^u) \subset E^u$ なので,

$$\begin{aligned} F(v_k^s) &= \sum_{r=1}^{n_s} b_{kr}^s v_r^s, \quad k = 1, \ldots, n_s, \\ F(v_k^c) &= \sum_{r=1}^{n_c} b_{kr}^c v_r^c, \quad k = 1, \ldots, n_c, \\ F(v_k^u) &= \sum_{r=1}^{n_u} b_{kr}^u v_r^u, \quad k = 1, \ldots, n_u. \end{aligned}$$

この基底で表現された F はブロック対角行列になる.

座標変換を

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} y_1^s & \cdots & y_{n_s}^s & y_1^c & \cdots & y_{n_c}^c & y_1^u & \cdots & y_{n_u}^u \end{bmatrix}^T =: \Phi \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

とすれば,

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_{1,t+1} \\ \vdots \\ y_{n,t+1} \end{bmatrix} &= \Phi^{-1} A \Phi \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{n,t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} B^s & & \\ & B^c & \\ & & B^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{n,t} \end{bmatrix} \\
&:= \begin{bmatrix}
b^s_{11} & \cdots & b^s_{1n^s} & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\
b^s_{n^s1} & \cdots & b^s_{n^sn^s} & & & & & & \\
& & & b^c_{11} & \cdots & b^c_{1n^c} & & & \\
& & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\
& & & b^c_{n^c1} & \cdots & b^c_{n^cn^c} & & & \\
& & & & & & b^u_{11} & \cdots & b^u_{1n^u} \\
& & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
& & & & & & b^u_{n^u1} & \cdots & b^u_{n^un^u}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{n,t} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

$B^s \in \mathbb{R}^{n^s \times n^s}$ の固有値はすべて絶対値が 1 より小さい, $B^c \in \mathbb{R}^{n^c \times n^c}$ は 1 と等しく, $B^u \in \mathbb{R}^{n^u \times n^u}$ は 1 より大きい. したがって,

$$
\begin{aligned}
\left\| \begin{bmatrix} y^s_{1,t} & \cdots & y^s_{n_s,t} \end{bmatrix}^T \right\| &= \left\| (B^s)^t \begin{bmatrix} y^s_{1,0} & \cdots & y^s_{n_s,0} \end{bmatrix}^T \right\| \to 0 \\
\left\| \begin{bmatrix} y^c_{1,t} & \cdots & y^c_{n_c,t} \end{bmatrix}^T \right\| &= \left\| (B^c)^t \begin{bmatrix} y^c_{1,0} & \cdots & y^c_{n_s,0} \end{bmatrix}^T \right\| \to ? \\
\left\| \begin{bmatrix} y^u_{1,t} & \cdots & y^u_{n_u,t} \end{bmatrix}^T \right\| &= \left\| (B^u)^t \begin{bmatrix} y^u_{1,0} & \cdots & y^u_{n_u,0} \end{bmatrix}^T \right\| \to \infty.
\end{aligned}
$$

参考文献

Stokey, N. L., R. E. Lucas, Jr., and E. C. Prescott (1989): *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.