経済動学・講義資料 2

神戸大学大学院経済学研究科
2015 年度前期

担当: 佐藤健治 mail@kenjisato.jp

2015 年 4 月 20 日

今後必要になるかもしれないので, Banach 空間における解析学を簡単に復習しておく.

1 ノルム空間

$\mathbb{K}$ を体とする. 特に断りがない限り $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ と考えてよい.

定義 **1.** X を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする. 写像 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ が次の 3 つの性質をもつとき, X 上のノルムと呼ばれる. 線形空間とノルムをあわせたものをノルム空間という.

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. すべての $x \in X$ とすべての $\alpha \in \mathbb{K}$ について, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
3. すべての $x, y \in X$ について, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

最後の不等式は三角不等式と呼ばれる.

多くの場合に「$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする」ということを単に「X をノルム空間とする」といい, $\|\cdot\|$ が X のノルムであることを述べない. 2 つの異なる線形空間 X, Y に付随するノルムを区別したい場合には $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ といった記法を用いる. 1 つの線形空間に付随する異なるノルムを区別する場合には $\|\cdot\|', \|\cdot\|''$ といった表記を用いて区別することもある.

例 **2.** ノルムの例
$\mathbb{K}$ は絶対値 $|\cdot|$ をノルムとするノルム空間である.
有限次元空間 X に, 基底を 1 つ固定する: $\{v_1, \dots, v_d\}$. この基底に関する展開を $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_d v_d$ としたとき, 次のように定義される実数値関数はすべてノルムの性質をもつ.

- $\|x\|_\infty := \max_i |\alpha_i|$,
- $\|x\|_1 := \sum_i |\alpha_i|$,

- $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_i |\alpha_i|^2}$

次に, 有界閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上の連続関数の集合 $C[a, b]$ を考えよう. $C[a, b]$ は演算 $(f + g)(\cdot) := f(\cdot) + g(\cdot)$ と $(\alpha f)(\cdot) := \alpha f(\cdot)$ により線形空間になる. 次の実数値写像はノルムの性質をもつ.

- $\|f\|_\infty := \max_x |f(x)|$,
- $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx$,
- $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$.

ノルムを用いてベクトル列 (点列) の収束を定義できる.[1]

定義 3. X をノルム空間とする. 点列 $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ が $x \in X$ に収束する (あるいはノルム収束する) とは,

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad n \to \infty$$

となることである. より正確にかけば, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > N$ に対して $\|x_n - x\| < \epsilon$ が成り立つということである. $(x_n)_{n=1}^\infty$ が x にノルム収束することを $x_n \to x$ (as $n \to \infty$) あるいは, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ とかく.

集合 $B(x, \epsilon) := \{y \in X \mid \|y - x\| < \epsilon\}$ を x の ϵ-近傍 (あるいは x を中心とする ϵ-球) という.

定義 4. X をノルム空間とする. 部分集合 $M \subset X$ が閉集合であるとは, 任意の $(x_n) \subset M$ について $x_n \to x \in M$ となることをいう. M が開集合であるとは, M の補集合, $M^c = \{x \in X \mid x \notin M\}$, が閉集合となることをいう. これは「任意の $x \in M$ について, ある $\epsilon > 0$ が存在して $\|y - x\| < \epsilon$ なる y が M に属する」という条件と同値である. 部分集合 M の閉包とは, M を含む最小の閉集合のことであり $\overline{M}$ と記す.

定義 5. X をノルム空間とする. 部分集合 $M \subset X$ がコンパクト (点列コンパクト) であるとは, 任意の無限列 $(x_n) \subset M$ に収束する部分列が存在することをいう.

例えば, $\mathbb{R}$ のコンパクト集合は有界閉集合である. これは, 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^d$ についてもいえる.[2]

定義 6. X, Y をノルム空間とする. 写像 $f : X \to Y$ が点 x で連続であるとは, 任意の収束点列 $x_n \to x$ について, $f(x_n) \to f(x)$ が成り立つことをいう. 任意の点 x で連続であるときに, f は連続であるという.

事実 7. 線形写像は原点で連続であれば連続である.

[1] ノルム空間の位相構造 (極限, 近傍, 開集合, 閉集合など) のほとんどすべては, ノルム空間が $d(x, y) := \|x-y\|$ を距離とする距離空間であるという性質から決まるものである. 一般に, 集合 S 上の距離 $d : S \times S \to \mathbb{R}_+$ とは, $x, y, z \in S$ について (i) $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$, (ii) $d(x, y) = d(y, x)$, (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ が成り立つことをいう. ノルム空間は原点まわりでの情報が空間全体の位相構造を決定するという特別な性質がある.

[2] Rudin (1976), Theorems 2.41, 2.42 を参照.

事実 8. ノルムは連続である.

証明. $x_n \to x$ とする. $|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \to 0$ よりノルムの連続性が従う [練習問題: 三角不等式から左の不等式が成り立つことを確認してください]. □

事実 9. X, Y をノルム空間, $M \subset X$ をコンパクト集合とする. 連続関数 $f : M \to Y$ の像 $f(M) \subset Y$ はまたコンパクトである. したがって, 連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ は最大値と最小値をもつ.

証明. $(y_n)_n \subset f(M)$ を任意にとれば, $y_n = f(x_n)$ なる $(x_n)_n \subset M$ が存在する. M はコンパクトなので, 収束する部分列 $(x_{n(k)})_k$ を選べる. f の連続性より, $f(x_{n(k)})$ もまた収束する. したがって, $(y_n)_n$ から収束する部分列 $(y_{n(k)})_k$ を常に選べることが分かる. 後半部分は明らかである. □

定義 10. X, Y をノルム空間とする. 線形写像 $L : X \to Y$ が有界であるとは, ある正数 M が存在して, 任意の $x \in X$ について $\|Lx\|_Y \leq M\|x\|_X$ が成り立つことをいう.

定理 11. X, Y をノルム空間とする. 線形写像 $L : X \to Y$ が連続であることと有界であることは同値である.

証明. L を有界とする. ある $M > 0$ があって, 任意の $x \in X$ について $\|Lx\|_Y \leq M\|x\|_X$ である. このとき, $x_n \to 0$ なる点列に対して, $\|Lx_n\|_Y \leq M\|x_n\|_X \to 0$ より, L は連続である (事実 7). 逆を証明するために, L が有界でないと仮定する. このとき, $\|Lx_n\|_Y > n\|x_n\|_X$ なる点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する. $w_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ とすれば, $w_n \to 0$ である一方で, $\|Lw_n\|_Y > 1$ となり, 連続でないことがわかる. □

点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ の選び方にノルムは無関係である一方で, それが収束するかどうかはノルム次第である. あるノルムでは収束するが, 別のノルムでは収束しないということももちろんありえる. しかし, 有限次元空間の場合には収束の定義はノルムによらず確定する.

定義 12. X を線形空間とする. X のノルム $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|''$ が同値であるとは, ある正数 C_1, C_2 が存在して, すべての $x \in X$ について

$$C_1\|x\|' \leq \|x\|'' \leq C_2\|x\|'$$

が成り立つことをいう.

主張 13. X を線形空間, $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|''$ を X の同値なノルムとする. 点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ が $\|\cdot\|'$ について $x \in X$ にノルム収束すれば $\|\cdot\|''$ についても x にノルム収束する.

定理 14. X を有限次元線形空間とする. X 上のノルムはすべて同値である.

証明. $\|\cdot\|$ を X のノルムとする. X の基底 $\{v_1, \ldots, v_d\}$ を固定する. $x \in X$ の展開を

$$x = \alpha^1 v_1 + \cdots + \alpha^d v_d$$

とする．$x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,d} |\alpha^i|$ は X 上のノルムである．集合 $S := \{x \in X \mid \|x\|_\infty = 1\}$ は有限次元空間上の有界閉集合なのでコンパクト．ノルムは連続関数なので $\|\cdot\|$ は S 上で最小値 c_1 と最大値 c_2 を取る．任意の $x \in X$ について $x/\|x\|_\infty \in S$ なので,

$$c_1\|x\|_\infty \le \|x\| \le c_2\|x\|_\infty$$

が成り立つ．すなわちすべてのノルムが, $\|\cdot\|_\infty$ と同値である．任意の 2 つのノルムが同値であることも簡単に示せる．

まず, 展開係数 $\alpha^i : X \to \mathbb{K}$ が有界線形写像 (汎関数) であることを示す．有界でないとすると, $|\alpha^i(x_n)| > n\|x_n\|$ なる点列 x_n が存在する．そうすれば $|\alpha^i(x_n/n\|x_n\|)| > 1$ であるから,

$$\|x\|' \le |\alpha^1(x)|\|v_1\|' + \cdots + |\alpha^d(x)|\|v_d\|' \le \Big(|\alpha^1(x)| + \cdots + |\alpha^d(x)|\Big) \max\left\{\|v_1\|', \dots, \|v_d\|'\right\}$$

である． □

補題 15. *X を有限次元線形空間 ($\dim X = d$), $\{v_1, \dots, v_d\}$ を X の基底, $\|\cdot\|$ を X 上のノルムとする．点列 $x_n = \alpha_n^1 v_1 + \cdots + \alpha_n^d v_d$, $n = 1, 2 \dots$ が $x = \alpha^1 v_1 + \cdots + \alpha^d v_d$ にノルム収束することと, 展開係数の収束 $\alpha_n^i \to \alpha^i$, $i = 1, \dots, d$, は同値である．*

証明. すべてのノルムが同値なので, 任意のノルムについて $\|x_n\| \to 0$ は, $\|x_n\|_\infty = \max_i |\alpha_n^i| \to 0$ を意味する．これは係数の収束にほかならない． □

2 Banach 空間

定義 16. X をノルム空間とする．点列 $(x_n) \subset X$ が Cauchy 列であるとは, 任意の n, m について,

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \qquad \text{as} \quad n, m \to \infty$$

が成り立つことをいう．

事実 17. *収束列は Cauchy 列である．*

証明. $(x_n) \subset X$ を収束列 $x_n \to x$ とする． $\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) - (x_m - x)\| \le \|x_n - x\| + \|x_m - x\| \to 0$. □

逆は成り立たない場合もある．例えば, 有理関数の集合 $\mathbb{Q}$ は, 通常の和と積について $\mathbb{Q}$ 上の線形空間であり, 通常の絶対値についてノルム空間となる．$\sqrt{2}$ を 10 進数で表示し小数点第 n 位で打ち切った有理数を q_n とすれば (たとえば, $q_5 = 1.41421$), 数列 (q_n) は $\mathbb{Q}$ で収束しない Cauchy 列である．

定義 18. X をノルム空間とする．X の Cauchy 列が必ず収束するとき, X は完備であるという．完備なノルム空間を Banach 空間という．

例 **19.** $\mathbb{R}^d$ 上の有界連続関数全体 $bc\mathbb{R}^d := \left\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \mid \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)| < \infty,\ f: \text{ continuous} \right\}$ は, ノルム $\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ とともに Banach 空間をなす. 完備性を確認しておく. $(f_n) \subset bc\mathbb{R}^d$ が Cauchy 列であるとする. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ について, 十分大きな $m < n$ をとれば

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

とできる. 任意の $x \in \mathbb{R}$ について, $(f_n(x))$ が $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列であり収束する. 極限 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定義される f が有界かつ連続であることを示せばよい. $||f_m(x)| - |f_n(x)|| < |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ より, $|f_m(x)| - \epsilon < |f_n(x)| < |f_m(x)| + \epsilon$, $n \to \infty$ とすれば $\sup |f(x)| \leq \|f_m\| + \epsilon$ となるから f は有界. 次に連続性を示す. 任意の $\epsilon > 0$ を取る. $f_n \to f$ は一様収束であり n を十分大きく取れば $\sup |f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$ とできる. (x_k) を $x_k \to x$ なる点列とすれば, f_n の連続性より k を十分大きく取って, $|f_n(x_k) - f_n(x)| < \epsilon/3$ とできる. よって

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x)| &= |f(x_k) - f_n(x_k) + f_n(x_k) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

から f は連続である.

上の例では, $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ なる関数に限定したがこれは必要ではなく, 上の証明がうまくいくためには終域の完備性が重要である.

定義 **20.** X をノルム空間, Y をノルム空間とする. X から Y への連続線形写像全体がなす線形空間 $\mathcal{L}(X, Y)$ に定義されるノルム

$$\|L\| := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Lx\|_Y$$

を作用素ノルムとよぶ. [練習問題: ノルムであることを確認してください]

事実 **21.** 任意の $x \in X$ に対して,

$$\|Lx\|_Y \leq \|L\| \|x\|_X$$

が成り立つ.

証明. $x = 0$ のときは自明. $x \neq 0$ とすると,$\|Lx\|_Y = \|L\frac{x}{\|x\|_X}\| \|x\|_X \leq \|L\| \|x\|_X$. □

定理 **22.** *X をノルム空間, Y を Banach 空間とする. $\mathcal{L}(X, Y)$ は Banach 空間である.*

証明. $(L_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ を Cauchy 列とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ について十分大きな m, n を取れば

$$\sup_{\|x\|_X = 1} \|L_n x - L_m x\|_Y < \epsilon \tag{1}$$

とできる．従って, $(L_nx)_{n=1}^{\infty} \subset Y$, $\|x\|_X = 1$ は Banach 空間 Y 上の Cauchy 列であり, 極限 $\lim_{n\to\infty} L_nx \in Y$ が存在する．これが任意の $x \in X$ に対して存在することは, $x = 0$ なら自明, $x \neq 0$ なら

$$\lim_{n\to\infty} L_nx = \|x\| \lim_{n\to\infty} L_n \frac{x}{\|x\|} \in Y$$

より分かる．したがって線形写像 $L : X \to Y$ を

$$Lx = \lim_{n\to\infty} L_nx, \quad x \in X$$

によって定義することができる．続いて L が有界であることを示す．数列 $(\|L_n\|)_{n=1}^{\infty}$ が有界列であることに注意すると, ある $M > 0$ が存在して任意の n に対して $\|L_n\| < M$ が成り立つようにできる.[3] $x_k \to 0$, $k \to \infty$, なる点列を取れば

$$\lim_{k\to\infty} \|Lx_k\| = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \|L_nx_k\| < M \lim_{k\to\infty} \|x_k\| = 0.$$

これで $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ が示された．L が (L_n) の作用素ノルムに関する極限であることは,

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|L_nx - Lx\|_Y \to 0$$

より分かる． □

定理 23. X を *Banach* 空間とする．$L \in \mathcal{L}(X, X)$ が $\|L\| < 1$ を満たすならば, $(I - L)$ は可逆であり,

$$(I - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k$$

が成り立つ．ただし, $L^0 = I$.

証明. 部分和を $S_n := \sum_{k=0}^{n} L^k$ とする．任意の $x \in X$, $\|x\| = 1$, と $n > m$ について,

$$\begin{aligned}
\|S_nx - S_mx\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} L^kx \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|L^kx\| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|L^kx\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|L\|^k \\
&\leq \frac{\|L\|^{m+1}(1 - \|L\|^{n-m})}{1 - \|L\|} \\
&\to 0 \qquad (\text{as } n, m \to \infty)
\end{aligned}$$

[3] (L_n) は Cauchy 列なので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して十分大きな N を選べば, $m, n \geq N$ について $\|L_m - L_n\| < \epsilon$ である．任意の $n > N$ について $\|L_n\| < \|L_N\| + \epsilon$ が成り立つので, $(\|L_n\|)_{n=1}^{\infty}$ は $M = \max\{\|L_1\|, \ldots, \|L_N\|, \|L_N\| + \epsilon\}$ でおさえられる．

したがって, (S_n) は $\mathcal{L}(X,X)$ に極限をもつ. この極限を S とすれば, 任意の $x \in X$ について

$$\begin{aligned}
(I-L)Sx &= (I-L)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} L^k x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} L^k x - \sum_{k=1}^{n+1} L^k x\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(x - L^{n+1}x\right) \\
&= x
\end{aligned}$$

最後の等式は $\|L^{n+1}x\| \leq \|L\|^{n+1}\|x\| \to 0$ より分かる. 同様にして, $S(I-L)x = x$ もいえる. $(I-L)$ の可逆性と級数公式が示された. □

系 24. *X を Banach 空間, P を適当な Banach 空間の部分集合とし, 写像 $P \ni p \mapsto L_p \in \mathcal{L}(X,X)$ が (作用素ノルムに関して) 連続であるとする. ある $q > 0$ が存在して任意の $p \in P$ について $\|L_p\| < q < 1$ を満たすとき, $p \mapsto (I-L_p)^{-1}$ もまた連続である.*

証明. 任意の $p_\infty \in P$ と $p_m \to p_\infty$ なる P の点列 (p_m) を取る. 以下, 表記の簡略化のため $L_m := L_{p_m}$, $L := L_{p_\infty}$ とする. $\|L_m^k - L^k\| < 2q^k$ と $\sum_{k=0}^{\infty} 2q^k = 2/(1-q)$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{\infty} L_m^k - \sum_{k=0}^{\infty} L^k\right\| &\leq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left\|L_m^k - L^k\right\| \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\left\|L_m^k - L^k\right\| \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. 最初の不等式はノルムの連続性と三角不等式, 2 つ目の不等式は Lebesgue の有界収束定理を適用した.[4] したがって

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_m^k \to \sum_{k=0}^{\infty} L^k$$

が分かる. □

系 25. *X, Y を Banach 空間,$L_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ は全単射で連続な逆写像 $L_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ をもつとする. このとき, $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ が $\|L - L_0\| < \|L_0^{-1}\|^{-1}$ を満たせば, L もまた全単射で連続な逆写像をもつ.*

証明. $\|L_0^{-1}L - I_X\| \leq \|L_0^{-1}\| \cdot \|L - L_0\| < 1$ に注意すれば, 定理 23 より $L_0^{-1}L \in \mathcal{L}(X,X)$ が可逆であり連続な逆写像 $(L_0^{-1}L)^{-1}$ をもつことが分かる. $(L_0^{-1}L)^{-1}L_0^{-1}L = I_X$, $L(L_0^{-1}L)^{-1}L_0^{-1} = L_0L_0^{-1}L(L_0^{-1}L)^{-1}L_0^{-1} = I_Y$ であるから, $L^{-1} = (L_0^{-1}L)^{-1}L_0^{-1}$ は存在して連続. □

パラメータに関する連続性も系 24 と同様に示すことができる.

[4] たとえば, Walter Rudin (1976) *Principles of Mathematical Analysis*, Third ed., p. 321 を参照.

3 Lipschitz 連続写像

3.1 定義

定義 26. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とする．作用素 $f : X \to Y$ が Lipschitz 連続であるとは, ある正数 K があって,

$$\|f(x') - f(x'')\|_Y \le K\|x' - x''\|_X$$

が成り立つことを言う．このような K の最小値を Lipschitz 定数と呼び, $\mathrm{Lip}(f)$ と書く．

定義 27. Lipschitz 連続写像 $f : X \to Y$ が $\mathrm{Lip}(f) < 1$ を満たすとき, f は縮小写像であるという．

事実 28. *Lipschitz 連続な写像は一様連続である．*

証明. 任意の $\epsilon > 0$ について, $\|x' - x''\|_X < \delta = \epsilon/K$ とすれば, $\|f(x') - f(x'')\|_X \le K\|y' - y''\|_Y < \epsilon$ である．δ は x', x'' と独立に選べるので f が一様連続であることが分かる． □

3.2 不動点定理

Banach 空間上の縮小写像は一意的な不動点を持つ．この定理は経済学でもよく使われるので証明を含めて理解しておく方がよい．Banach 空間の閉部分集合に対して述べているが, 証明からも明らかなように完備距離空間で成り立つ．

定理 29. *X を Banach 空間, A を X の閉部分集合, 作用素 $T : A \to A$ がある $0 < q < 1$ について*

$$\|T(y') - T(y'')\| \le q\|y' - y''\| \quad \forall y', y'' \in A \tag{2}$$

を満たすとする．このとき, 不動点 $y \in A$ が一意的に存在する．

証明. 任意の $y^0 \in A$ に対して,

$$y^n := T(y^{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

とおくと,

$$\begin{aligned} y^n &= \sum_{j=1}^{n} \left(y^j - y^{j-1}\right) + y^0 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(T^{j-1}(y^1) - T^{j-1}(y^0)\right) + y^0 \end{aligned}$$

任意の $n > m$ について

$$
\begin{aligned}
\|y^n - y^m\| &= \left\| \sum_{j=m+1}^{n} \left(T^{j-1}(y^1) - T^{j-1}(y^0) \right) \right\| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{n} \|T^{j-1}(y^1) - T^{j-1}(y^0)\| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{n} q^{j-1} \|y^1 - y^0\| \\
&\leq \frac{q^m}{1-q} \|y^1 - y^0\| \\
&\to 0 \quad (\text{as } n, m \to \infty)
\end{aligned}
$$

したがって, (y^n) は Cauchy 列であり, X で収束する. A は閉集合なので, 極限は A の元である. この極限を y とおくと,

$$
y = \lim_{n\to\infty} y^n = \lim_{n\to\infty} y^{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(y^n) = T(y).
$$

最後の等式は, T の連続性を使っているが, これは式 2 より明らかである. $y'_x \neq y''_x$ がともに T_x の不動点であるとすると,

$$
\|y'_x - y''_x\| = \|T_x(y'_x) - T_x(y''_x)\| \leq q\|y'_x - y''_x\|
$$

より, $1 \leq q$ となり不合理. したがって, 不動点は一意的である. □

B, B_0 を Banach 空間, $U \subset B_0$ を開集合とする. 作用素の族 $\{T_x : B \to B\}_{x \in U}$ が強連続であるとは, 任意の $y \in B$ について $x \mapsto T_x(y)$ が連続であることをいう. すなわち, $\|x_n - x\|_{B_0} \to 0$ のとき, $\|T_{x_n}(y) - T_x(y)\|_B \to 0$ が成り立つ. U でパラメータ化された縮小写像の属に関する次の定理は陰関数定理, Hartman の定理の証明で使われる.

定理 30. *X, B_0 を Banach 空間, A を X の閉部分集合, $U \subset B_0$ を開集合とする. 強連続な作用素の族 $\{T_x : A \to A\}_{x \in U}$ がある共通の $q < 1$ について*

$$
\|T_x(y_1) - T_x(y_2)\| \leq q\|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in A \tag{3}
$$

を成り立たせているとする. このとき, 任意の x について不動点 $y_x \in A$ を対応させる写像 $x \mapsto y_x$ は連続である.

証明. 任意の $x \in U$ を固定すれば, 定理 29 によって y_x の一意的な存在が保証されるから写像 $x \mapsto y_x$ が定まる. この連続性を示せばよい. 任意の収束点列 (x^n), $x^n \to x$ を取る. こ

のとき,

$$\begin{aligned}\|y_x - y_{x^n}\| &= \|T_x(y_x) - T_{x^n}(y_{x^n})\| \\ &= \|T_x(y_x) - T_{x^n}(y_x) + T_{x^n}(y_x) - T_{x^n}(y_{x^n})\| \\ &\leq \|T_x(y_x) - T_{x^n}(y_x)\| + \|T_{x^n}(y_x) - T_{x^n}(y_{x^n})\| \\ &\leq \|T_x(y_x) - T_{x^n}(y_x)\| + q\|y_x - y_{x^n}\|\end{aligned}$$

したがって,

$$\|y_x - y_{x^n}\| \leq \frac{1}{1-q}\|T_x(y_x) - T_{x^n}(y_x)\| \to 0.$$

最後の極限操作には T の強連続性を使っている. これで $x \mapsto y_x$ の連続性が示された. □

4 Banach 空間の間の写像の微分

定義 31. X, Y を Banach 空間, $\Omega \subset X$ を開集合とする. 写像 $F : \Omega \to Y$ が点 $x \in \Omega$ で微分可能 (Frchet 微分可能) であるとは, ある連続線形写像 $L_x : X \to Y$ が存在して,

$$\lim_{\|x'-x\|_X \to 0} \frac{\|F(x') - F(x) - L_x(x'-x)\|_Y}{\|x'-x\|_X} = 0$$

が成り立つことをいう. 任意の点 $x \in \Omega$ で微分可能であるとき, F は Ω 上で微分可能であるという. L_x は導関数とよばれ, 普通は $DF(x)$ と書く.

上記極限に関する簡便な記法

$$F(x') - F(x) = L_x(x'-x) + o(\|x'-x\|)$$

が使われることも多い. $o(\cdot)$ という記号が意味していることは,

$$F(x') - F(x) = L_x(x'-x) + r(x', x)$$

なる $r(x', x)$ に対して,

$$\lim_{\|x'-x\| \to 0} \frac{r(x', x)}{\|x'-x\|} = 0$$

が成り立つということである.

定義 32. X, Y を Banach 空間, $\Omega \subset X$ を開集合とする. 微分可能写像 $F : \Omega \to Y$ が連続微分可能であるとは,

$$\|DF(x') - DF(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0 \qquad \text{as} \quad x' \to x$$

が成り立つことをいう.

例 33. $L \in \mathcal{L}(V, W)$ なら $DL = L$ である.

定義 34. X, Y を Banach 空間, $\Omega \subset X$ を開集合とする. 写像 $F : \Omega \to Y$ が点 $x \in \Omega$ で 2 階微分可能であるとは, $DF : \Omega \to \mathcal{L}(X, Y)$ が x で微分可能であることをいう. すなわち, 有界線形写像 $D^2F(x) : X \to \mathcal{L}(X, Y)$ が存在して,

$$\lim_{\|x'-x\|_X \to 0} \frac{\|DF(x') - DF(x) - D^2F(x)(x'-x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\|x'-x\|_X} = 0$$

となる. 任意の $x \in \Omega$ について 2 階微分可能であるとき Ω で 2 階微分可能であるという. $x \mapsto D^2F(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ が連続であるとき, 2 階連続微分可能であるという.

高階の微分可能性についても帰納的に定義できる.

例 35. $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}$ とする. 多変数関数 $f(x_1, \ldots, x_m)$ はすべての偏導関数が存在すれば微分可能であり $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ の表現行列は

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

これは勾配ベクトル ∇f と同一のベクトルである.

例 36. $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ とする. 多変数ベクトル値関数

$$F(x_1, \ldots, x_m) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{bmatrix}$$

は各 $f_1, \ldots, f_n$ が連続微分可能であるとき連続微分可能である. 導関数は Jacobi 行列

$$DF(x_1, \ldots, x_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

と一致する. $m = n = 2$ のケースで 2 階導関数の様子を観察してみよう. まず $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ は 2×2 行列の表現をもちこれは $\mathbb{R}^4$ と同一視できるので, $D^2F(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$ は 4×2 行列で表現できることに注意する. $DF(y) - DF(x)$ の各成分を明らさま

に書けば,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(y)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(y)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(y)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2(y)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^2}(y_1 - x_1) + \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2 \partial x_1}(y_2 - x_2) \\ \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2}(y_1 - x_1) + \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2^2}(y_2 - x_2) \\ \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_1^2}(y_1 - x_1) + \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_1}(y_2 - x_2) \\ \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2}(y_1 - x_1) + \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2^2}(y_2 - x_2) \end{bmatrix} + o(\|y - x\|)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2^2} \\ \hline \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial x_2^2} \end{array}\right] (y - x) + o(\|y - x\|)$$

となる．これは f_1, f_2 の Hesse 行列, Hess(f_1), Hess(f_2), を縦に並べたものに他ならない．一般の m, n への拡張も容易である．

定理 37. 微分可能写像は局所的に *Lipschitz* 連続である．したがって, 微分可能写像は連続である．

証明. 写像 $F : X \supset \Omega \to Y$ を微分可能であるとする．$x'' \in \Omega$ における連続微分可能性より, 有界線形作用素 $L_{x''} : X \to Y$ が定まり,

$$\lim_{\|x' - x''\| \to 0} \frac{\|F(x') - F(x'') - L_{x''}(x' - x'')\|_Y}{\|x' - x''\|_X} = 0$$

が成り立つ．したがって, 任意の $\epsilon > 0$ について, $\|x' - x''\|$ を十分小さくとれば

$$\|F(x') - F(x'')\|_Y - \|L_{x''}(x' - x'')\|_Y \leq \|F(x') - F(x'') - L_{x''}(x' - x'')\|_Y < \epsilon \|x' - x''\|_X$$

とできる．$L_{x''}$ の有界性により, $\sup_x \|L_{x''} x\|_Y \leq M$ となる正数 M が存在するので,

$$\|F(x') - F(x'')\|_Y \leq (M + \epsilon) \|x' - x''\|_X.$$

□

定理 38. X, Y, Z を *Banach* 空間とする．$F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ はそれぞれ, $\bar{x}$, $\bar{y} = F(\bar{x})$ の近傍で微分可能であるとする．このとき, $G \circ F$ が $\bar{x}$ の近傍で定義できて, 微分可能である．導関数は

$$D(G \circ F)(\bar{x}) = DG(\bar{y}) \circ DF(\bar{x}).$$

証明. F は微分可能性だから連続, $\bar{x}$ の近傍を $\bar{y}$ の近傍に写すので $G \circ F$ を定義できる.

$$\begin{aligned}
& G \circ F(x) - G \circ F(\bar{x}) - DG(\bar{y}) \circ DF(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) \\
& = [G \circ F(x) - G \circ F(\bar{x}) - DG(\bar{y}) \cdot (F(x) - F(\bar{x}))] \\
& + [DG(\bar{y}) \cdot (F(x) - F(\bar{x})) - DG(\bar{y}) \circ DF(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})] \\
& = o(\|F(x) - F(\bar{x})\|) + o(\|x - \bar{x}\|) \\
& = o(\|x - \bar{x}\|).
\end{aligned}$$

最後の等式は, 定理 37 により

$$\frac{o(\|F(x) - F(\bar{x})\|)}{\|x - \bar{x}\|} = \frac{o(\|F(x) - F(\bar{x})\|)}{\|F(x) - F(\bar{x})\|} \cdot \frac{\|F(x) - F(\bar{x})\|}{\|x - \bar{x}\|} \to 0$$

が成り立つことから示される. □

2 つの Banach 空間 X_1, X_2 の直積空間 $X_1 \times X_2$ にノルム

$$\|(x_1, x_2)\|_{X_1 \times X_2} := \max\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\}$$

を導入すると再び Banach 空間になる.

定義 39. X_1, X_2, Y を Banach 空間とする. 写像 $F : X_1 \times X_2 \to W$ の点 (x_1, x_2) における偏微分 $D_1F(x_1, x_2) \in \mathcal{L}(X_1, Y), D_2F(x_1, x_2) \in \mathcal{L}(X_2, Y)$ を

$$\begin{aligned}
\lim_{\|x_1' - x_1\|_{X_1} \to 0} \frac{\|F(x_1', x_2) - F(x_1, x_2) - D_1F(x_1, x_2) \cdot (x_1' - x_1)\|_Y}{\|x_1' - x_1\|_{X_1}} &= 0, \\
\lim_{\|x_2' - x_2\|_{X_2} \to 0} \frac{\|F(x_1, x_2') - F(x_1, x_2) - D_2F(x_1, x_2) \cdot (x_2' - x_2)\|_Y}{\|y_2 - x_2\|_{X_2}} &= 0
\end{aligned}$$

を満たす線形写像として定義する. 微分可能性, 連続微分可能性, 高階偏微分や, さらには変数が 2 より大きい場合の偏微分も同様に定義できる.

事実 40. X_1, X_2, Y を *Banach* 空間とする. 写像 $F : X_1 \times X_2 \to Y$ が点 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ で微分可能であるとする. F の微分 $DF(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, Y)$ は

$$(x_1, x_2) \mapsto D_1F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cdot x_1 + D_2F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \cdot x_2$$

と一致する.

証明. 埋め込み

$$\begin{aligned}
\iota_1 : & X_1 \to X_1 \times X_2 \\
& x_1 \mapsto (x_1, 0)
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \iota_2 : & X_2 \to X_1 \times X_2 \\ & x_2 \mapsto (0, x_2) \end{aligned}$$

を定義しよう．これは有界線形写像であり，したがって微分可能である．

$$(x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \iota_1(x_1 - \bar{x}_1) + \iota_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

だから，

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) - F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) &= DF \circ \iota_1(x_1 - \bar{x}_1) + DF \circ \iota_2(x_2 - \bar{x}_2) \\ &= D_1F(x_1 - \bar{x}_1) + D_2F(x_2 - \bar{x}_2) \end{aligned}$$

最後の等式は偏微分の定義と微分の連鎖律を使っている． □

5 陰関数定理

この章では無限次元の陰関数定理に対する Jost (2005) 証明を紹介する．経済学への応用も知られており，たとえば Araujo and Scheinkman (1977) で使われている．

定理 41. X_1, X_2, Y を *Banach* 空間とする．$\Omega \subset X_1 \times X_2$ を開集合，$F : \Omega \to Y$ は連続微分可能で $(x_0, y_0) \in \Omega$, $F(x_0, y_0) = 0$ とする．線形写像

$$D_2F(x_0, y_0) : X_2 \to Y$$

は可逆で，逆写像 $(D_2F)^{-1}(x_0, y_0)$ も (x_0, y_0) で連続であるとする．このとき，次の性質を満たす開近傍 $\Omega_1 \ni x_0$, $\Omega_2 \ni y_0$, $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$, と 連続微分可能写像 $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ が存在して，任意の $x \in \Omega_1$ について

$$\begin{aligned} F(x, g(x)) &= 0 \\ Dg(x) &= -(D_2F(x, g(x)))^{-1} \circ D_1F(x, g(x)) \end{aligned}$$

が成り立つ．各 $x \in \Omega_1$ に対して，$F(x, y) = 0$, $y \in \Omega_2$, の唯一の解が $g(x)$ である．

証明. $L_0 := D_2F(x_0, y_0)$ と書く．$F(x, y) = 0$ と

$$y = G(x, y) := y - L_0^{-1}F(x, y)$$

は同値である (L_0 は可逆だから)．したがって，$y \mapsto G(x, y)$ の不動点 y_x に関する問題に帰

着される.

$$\begin{aligned} G(x,y_1)-G(x,y_2) &= \big(y_1-L_0^{-1}F(x,y_1)\big)-\big(y_2-L_0^{-1}F(x,y_2)\big) \\ &= \big(L_0^{-1}L_0y_1-L_0^{-1}F(x,y_1)\big)-\big(L_0^{-1}L_0y_2-L_0^{-1}F(x,y_2)\big) \\ &= L_0^{-1}\left(D_2F(x_0,y_0)(y_1-y_2)-(F(x,y_1)-F(x,y_2))\right) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} &\frac{\|G(x,y_1)-G(x,y_2)\|}{\|y_1-y_2\|} \\ &\le \frac{\|L_0^{-1}\|\left(\|D_2F(x_0,y_0)-D_2F(x,y_0)\|\|y_1-y_2\|+\|D_2F(x,y_0)-(F(x,y_1)-F(x,y_2))\|\right)}{\|y_1-y_2\|} \\ &= \|L_0^{-1}\|\|D_2F(x_0,y_0)-D_2F(x,y_0)\|+\frac{\|D_2F(x,y_0)-(F(x,y_1)-F(x,y_2))\|}{\|y_1-y_2\|} \end{aligned}$$

右辺第 1 項は $x\to x_0$ のとき微分の連続性よりゼロに収束する. 第 2 項は, 微分可能性より $y_1,y_2\to y_0$ でゼロに収束する. したがって, ある $\delta_1,\eta>0$ に対して, $x\in\overline{B(x_0,\delta_1)}$, $y_1,y_2\in\overline{B(y_0,\eta)}$ であれば

$$\|G(x,y_1)-G(x,y_2)\|<\frac{1}{2}\|y_1-y_2\|$$

が成り立つようにできる. 一方,

$$\|G(x,y_0)-G(x_0,y_0)\|=\|L_0^{-1}\|\|F(x_0,y_0)-F(x,y_0)\|\to 0,\quad \text{as}\quad x\to x_0$$

だから, ある $\delta_2>0$ が存在して, $x\in\overline{B(x_0,\delta_2)}$ に対して

$$\|G(x,y_0)-G(x_0,y_0)\|<\frac{\eta}{2}$$

が成り立つようにできる. $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおけば, $x\in\overline{B(x_0,\delta)}$, $y\in\overline{B(y_0,\eta)}$ に対して,

$$\begin{aligned} \|G(x,y)-y_0\| &= \|G(x,y)-G(x_0,y_0)\| \\ &\le \|G(x,y)-G(x,y_0)\|+\|G(x,y_0)-G(x_0,y_0)\| \\ &< \frac{1}{2}\|y-y_0\|+\frac{\eta}{2} \\ &\le \eta \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって,

$$G(x,\cdot):\overline{B(y_0,\eta)}\to\overline{B(y_0,\eta)}$$

であるので, 定理 30 が適用できる. $\Omega_1=B(x_0,\delta)$, $\Omega_2=B(y_0,\eta)$ とすれば, 任意の $x\in\Omega_1$ について不動点 $y=g(x)\in\Omega_2$ が一意に存在し, x の連続写像であることがわかる.

最後に g の連続可微分性を示す. $(x_1,y_1)\in\Omega_1\times\Omega_2$, $y_1=g(x_1)$ とする. F は (x_1,y_1) で

微分可能なので, $K = D_1F(x_1, y_1)$, $L = D_2F(x_1, y_1)$ とすれば, $(x, y) \in \Omega$ に対して,

$$F(x, y) = K(x - x_1) + L(y - y_1) + \phi(x, y),$$

が成り立つ. ただし, $\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} \frac{\phi(x,y)}{\|(x-x_1,y-y_1)\|} = 0$. $F(x, g(x)) = 0$ より,

$$0 = K(x - x_1) + L(g(x) - y_1) + \phi(x, g(x)).$$

δ, η が十分に小さければ L は連続な逆写像をもつ. なぜなら, $\|L - L_0\| = \|I - L\| < 1$

$$g(x) - g(x_1) = -L^{-1}K(x - x_1) - L^{-1}\phi(x, g(x))$$

が成り立つ.

$$\frac{\|L^{-1}\phi(x, g(x))\|}{\|x - x_1\|} \to 0 \qquad \text{as} \quad x \to x_1$$

より, $Dg(x) = -L^{-1}K = -D_2F(x, g(x))^{-1} \circ D_1F(x, g(x))$ がわかる. これが連続であることもあきらか. $\square$

参考文献

Araujo, A. and J. A. Scheinkman (1977): "Smoothness, comparative dynamics, and the turnpike property," *Econometrica*, 45, 601–620.

Jost, J. (2005): *Postmodern Analysis*, Springer.

Rudin, W. (1976): *Principle of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, third ed.