経済動学・講義資料 4

神戸大学大学院経済学研究科

2015 年度前期

担当: 佐藤健治 mail@kenjisato.jp

2015 年 5 月 11 日

凹関数の微分に関する理論を復習したあと, 横断性条件について解説する.

1 凸集合と凹関数

X を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする.

定義 1. 集合 $C \subset X$ が凸集合 (a convex set) であるとは, 任意の $x, y \in C$ と任意の $t \in [0, 1]$ について, $tx + (1-t)y \in D$ が成り立つことをいう.

定義 2. $C \subset X$ を凸集合とする. 関数 $f : C \to \mathbb{R}$ が凹関数であるとは, 任意の $x, y \in C$ と任意の $t \in [0, 1]$ について

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成り立つことをいう. $-f$ が凹関数であるとき, f は凸関数であるという.

定義 3. $C \subset X$ を凸集合とする. 関数 $f : C \to \mathbb{R}$ が厳密な凹関数 (a strictly concave function) であるとは, 任意の $x \neq y \in C$ と任意の $t \in (0, 1)$ について

$$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成り立つことをいう. $-f$ が厳密な凹関数であるとき, f は厳密な凸関数であるという.

2 Gâteaux 微分と Fréchet 微分

ここは Jahn (2007, Chapter 3) を参考にした.

定義 4. X を $\mathbb{R}$ 上の線形空間, Y を $\mathbb{R}$ 上のノルム空間, f を $\emptyset \neq S \subset X$ 上で定義された写像 $f : S \to Y$ とする. $\bar{x} \in S$, $h \in X$ に対して極限

$$f'(\bar{x}; h) := \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x})}{\lambda}$$

が存在するとき, この極限を「点 $\bar{x}$ における f の h 方向の方向微分」という. すべての方向 $h \in X$ に方向微分が存在するとき, f は点 $\bar{x}$ で方向微分可能であるという.

補題 5. X を $\mathbb{R}$ 上の線形空間, $f : X \to \mathbb{R}$ を凹関数とする. 任意の $\bar{x}, h \in X$, に対して

$$\phi(\lambda) = \frac{f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x})}{\lambda}, \quad \lambda > 0$$

は単調非増加である.

証明. $0 < s \leq t$ とする.

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{f(\bar{x} + sh) - f(\bar{x})}{s} \\ &= \frac{f\left(\frac{s}{t}(\bar{x} + th) + (1 - \frac{s}{t})\bar{x}\right) - f(\bar{x})}{s} \\ &\geq \frac{\frac{s}{t}f(\bar{x} + th) + (1 - \frac{s}{t})f(\bar{x}) - f(\bar{x})}{s} \\ &= \frac{\frac{s}{t}f(\bar{x} + th) - \frac{s}{t}f(\bar{x})}{s} \\ &= \phi(t). \end{aligned}$$

□

定理 6. X を $\mathbb{R}$ 上の線形空間, $f : X \to \mathbb{R}$ を凹関数とする. 任意の $\bar{x} \in X$ に対してすべての方向 $h \in X$ に方向微分 $f'(\bar{x}; h)$ が存在する.

証明. $\lim_{\lambda \to 0+} \phi(\lambda)$ が存在することを言えばよいので, $\phi(\lambda)$ が上に有界であることを示せば十分.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f\left(\frac{1}{1+\lambda}(\bar{x} + \lambda h) + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\bar{x} - h)\right) \\ &\geq \frac{1}{1+\lambda}f(\bar{x} + \lambda h) + \frac{\lambda}{1+\lambda}f(\bar{x} - h) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} (1+\lambda)f(\bar{x}) &\geq f(\bar{x} + \lambda h) + \lambda f(\bar{x} - h) \\ &\Updownarrow \\ \lambda(f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h)) &\geq f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x}) \\ &\Updownarrow \\ f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h) &\geq \phi(\lambda). \end{aligned}$$

□

定義 7. X, Y を $\mathbb{R}$ 上のノルム空間とする. $S \subset X$ を非空な開集合とする. ある $\bar{x} \in S$ と すべての $h \in X$ について方向微分 $f'(\bar{x}; h)$ が定まり, 写像 $X \ni h \mapsto f'(\bar{x}; h) \in Y$ が連続線形

写像であるとき, f は $\bar{x}$ で Gâteaux 微分可能であるという. 任意の $\bar{x} \in S$ で Gâteaux 微分可能であるとき, S 上で Gâteaux 微分可能であるという. $f'(\bar{x}) : h \mapsto f'(\bar{x}; h)$ を f の $\bar{x}$ における Gâteaux 導関数という.

Fréchet 微分はすでに登場しているが, 定義をおさらいしておく.

定義 8. X, Y を $\mathbb{R}$ 上のノルム空間とする. $S \subset X$ を非空な開集合とする. ある $\bar{x} \in S$ に対して, 連続線形写像 $Df(\bar{x})$ が存在して

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - Df(x)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

が成り立つとき, f は $\bar{x}$ で Fréchet 微分可能であるという. 任意の $\bar{x} \in S$ で Fréchet 微分可能であるとき, S 上で Fréchet 微分可能であるという. $Df(\bar{x})$ を $\bar{x}$ における Fréchet 導関数という.

定理 9. X, Y を $\mathbb{R}$ 上のノルム空間, $S \subset X$ を非空な開集合とする. ある $\bar{x} \in S$ において *Féchet* 微分可能であれば, その点で *Gâteaux* 微分可能であり, $f'(\bar{x}) = Df(\bar{x})$ が成り立つ.

証明. f が Fréchet 微分可能であるとすれば,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})\lambda h\|_Y}{\|\lambda h\|_X} = 0, \quad h \neq 0.$$

もちろん $\lambda > 0$ に限定しても,

$$\frac{\|f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})\lambda h\|_Y}{\|\lambda h\|_X} = \left\| \frac{f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x})}{\lambda} - Df(\bar{x})h \right\| \cdot \|h\|_X \to 0, \quad \lambda \to 0+$$

なので,

$$f'(\bar{x}; h) = \lim_{\lambda \to 0+} \frac{f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x})}{\lambda} = Df(\bar{x})h.$$

□

Gâteaux 導関数は定義から自動的に一意性が保証されている. Fréchet 導関数も存在すれば一意であることが分かる.

系 10. *Fréchet* 導関数は存在すれば一意である.

定理 11. $C \subset X$ を非空な開凸集合とする. $f : C \to \mathbb{R}$ が C 上で *Gâteaux* 微分可能であるとする. f が凹関数であるとき, またそのときに限り

$$f(y) - f(x) \leq f'(x)(y - x), \quad x, y \in C \tag{1}$$

が成り立つ.

証明. f が凹関数であると仮定する. このとき, 任意の $\lambda \in (0, 1]$ に対して

$$f(x + \lambda(y - x)) = f(\lambda y + (1 - \lambda)x) \geq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(x)$$

だから,

$$f(y)-f(x)\le\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda}\to f'(x)(y-x).$$

式 (1) が成立しているとする. 任意の $\lambda\in[0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}
f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda y)) &\le f'(\lambda x+(1-\lambda)y)(y-(\lambda x+(1-\lambda)y))\\
&=f'(\lambda x+(1-\lambda)y)(-\lambda(x-y))\\
&=-\lambda f'(\lambda x+(1-\lambda)y)(x-y)\\
f(x)-f(\lambda x+(1-\lambda y)) &\le f'(\lambda x+(1-\lambda)y)(x-(\lambda x+(1-\lambda)y))\\
&=(1-\lambda)f'(\lambda x+(1-\lambda y))(x-y)
\end{aligned}$$

したがって,

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda y))\ge 0.$$

□

定理 12. $f:X\to\mathbb{R}$ が $\bar{x}$ で最大値を達成し, かつ $\bar{x}$ において *Gâteaux* 微分可能であれば

$$f'(\bar{x})h=0,\quad h\in X$$

が成り立つ.

3 横断性条件

前回, Euler 条件

$$D_2u(k_{t-1},k_t)+\rho D_1u(k_t,k_{t+1})=0,\quad t=1,2,\dots \tag{2}$$

が決定する力学系,

$$\begin{bmatrix}x_{t-1}\\x_t\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x_t\\F(x_{t-1},x_t)\end{bmatrix},$$

の不動点は鞍点安定であるか完全不安定であることを示した. しかしこの力学系は, 2 つの (拡張された) 初期値 (k_0,k_1) を同時に与えた場合に解軌道を決定するものであるから, 初期値 k_0 に対する最適解を完全に特徴付けしている訳ではない. 要するに, 必要な情報が 1 つ欠落しているのである. Euler 方程式を満たす軌道の中から最適なものを特定するためには, $t\to\infty$ についての情報を補ってやる必要がある. それが次の横断性条件と呼ばれるものである.

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\rho^tD_2u(k_t,k_{t+1})k_{t+1}\right]=0.$$

$-\rho^tD_2u(k_t,k_{t+1})$ は投資 k_{t+1} を 1 単位増やすことで犠牲にしなければならない効用の割引現在価値である. あるいは投資の限界コストである. 仮に $-\rho^tD_2u(k_t,k_{t+1})k_{t+1}\not\to 0$ であるとするならば, $t\to\infty$ における投資のコストが現時点で消滅していないことを意味するの

で, 無限に長い将来まで投資を拡大し続けている状況を表している. 消費（フロー変数）だけから効用が得られるような通常のモデルではこのようなことは起こりえない.

3.1 横断性条件の十分性

Euler 条件を満たす経路は必ずしも最適とは限らないが, その経路が横断性条件を満たせば最適であることを証明できる. 重要な性質なので, モデルに課すべき条件を発見的に証明してみよう.

経路 $k = (k_t)$ が Euler 条件を満たす内点経路 (内点経路でなければ微分ができない) であるとする. k が最適であるということは, 任意の実行可能経路 k' について

$$\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k_t, k_{t+1}) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k'_t, k'_{t+1})$$

が成立するということである. 両辺の差

$$\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k_t, k_{t+1}) - \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k'_t, k'_{t+1})$$

を評価して非負となるようにすればよい. まず課さなければならない条件は, この差を定義できるようにするための条件である. もっとも簡単なものは u の有界性であろう. $\|u\| < \infty$ であれば, $\sum_{t\geq 0} \rho^t |u(k_t, k_{t+1})| \leq \sum_{t\geq 0} \rho^t \|u\| \leq \frac{\|u\|}{1-\rho} < \infty$ より両辺の級数は必ず収束する.[1] 次に,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k_t, k_{t+1}) - \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k'_t, k'_{t+1}) = \lim_{T\to\infty} \left(\sum_{t=0}^{T} \rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(k'_t, k'_{t+1}) \right] \right)$$

と変形すれば $u(k_t, k_{t+1}) - u(k'_t, k'_{t+1})$ を下から抑える関数を見つけるという方針が見えてくる. u が凹関数であることを仮定すれば定理 11 より

$$u(k_t, k_{t+1}) - u(k'_t, k'_{t+1}) \geq D_1 u(k_t, k_{t+1})(k_t - k'_t) + D_2 u(k_t, k_{t+1})(k_{t+1} - k'_{t+1})$$

が成り立つ. 記法の簡略化のために

$$\phi^1_{t,t+1} = D_1 u(k_t, k_{t+1}), \quad \phi^2_{t,t+1} = D_2 u(k_t, k_{t+1})$$

[1] 絶対収束級数は収束する. Rudin (1976, Theorem 3.45)

とおこう．Euler 条件によって，$\phi^2_{t,t+1} + \rho\phi^1_{t,t+1} = 0$ が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{T} \rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(k'_t, k'_{t+1})\right] \\
&\geq \sum_{t=0}^{T} \rho^t \left[\phi^1_{t,t+1}(k_t - k'_t) + \phi^2_{t,t+1}(k_{t+1} - k'_{t+1})\right] \\
&= \phi^1_{0,1}(k_0 - k'_0) + \sum_{t=1}^{T} (\phi^2_{t-1,t} + \rho\phi^1_{t,t+1})(k_t - k'_t) + \rho^T \phi^2_{T,T+1}(k_{T+1} - k'_{T+1}) \\
&= \rho^T \phi^2_{T,T+1}(k_{T+1} - k'_{T+1}).
\end{aligned}
$$

$T \to \infty$ の極限を取ると (現れる極限がすべて意味をもつものとして)，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(k'_t, k'_{t+1})\right] \\
&\geq \lim_{T\to\infty} \rho^T \phi^2_{T,T+1}(k_{T+1} - k'_{T+1}) \\
&\geq \lim_{T\to\infty} \rho^T \phi^2_{T,T+1}(k_{T+1}) - \lim_{T\to\infty} \rho^T \phi^2_{T,T+1}(k'_{T+1})
\end{aligned}
$$

が得られる．最適解 $k = (k_t)$ に関する条件を得たいのだから，最右辺第 2 項の $k' = (k'_t)$ を残す訳にはいかない．これを消すためは

$$
\lim_{T\to\infty} -\rho^T \phi^2_{T,T+1}(k'_{T+1}) = \lim_{T\to\infty} -\rho^T D_2 u(k_T, k_{T+1}) k'_{T+1} \geq 0
$$

が任意の実行可能経路 k' について成り立つことを仮定すればよい．より強めた

$$
D_2 u(x, y)\bar{k} \leq 0, \quad (x, y) \in \mathrm{int}\mathbb{D}, \quad \bar{k} \in \mathbb{R}^m_+
$$

を仮定してもよい (これは投資にはコストがかかるというもっともな条件である)．そのようにして，

$$
\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(k'_t, k'_{t+1})\right] \quad \geq \quad \lim_{T\to\infty} \rho^T \phi^2_{T,T+1}(k_{T+1})
$$

を得る．右辺がゼロに収束すれば最適性が言えるので，

$$
\lim_{T\to\infty} -\rho^T D_2(k_T, k_{T+1}) k_{T+1} = 0
$$

を仮定すると最適性が従うのである．

定理 13. $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ は凸集合，$u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ は有界な凹関数，$\mathbb{D}$ の内点で微分可能，任意の $\bar{k} \in \mathbb{R}^n_+$ に対して $D_2 u(\cdot, \cdot)\bar{k} \leq 0$ が成り立つとする．このとき実行可能経路 $k = (k_t)^\infty_{t=0}$

が $Euler$ 条件

$$D_2u(k_{t-1},k_t)+D_1u(k_t,k_{t+1})=0,\quad t=0,1,\ldots$$

を満たす内点経路であり, 横断性条件

$$\lim_{T\to\infty}-\rho^TD_2u(k_T,k_{T+1})k_{T+1}=0$$

も満たすならば k は最適経路である.

3.2 横断性条件の必要性

最適ならばEuler 条件を満たす. 逆に Euler 条件　を満たす経路が横断性条件を満たせばそれは最適経路である. これらがここまでで分かっていることである. 次に取り組むべき課題は, 「Euler 条件を満たすけれども横断性条件を満たさないような最適経路は存在するか？」という問題である. ここでは, 横断性条件を満たさない最適経路を排除するための条件を紹介する.

発見的な証明を試してみよう. 証明したいことは「最適解ならば横断性条件を満たす」ということである.[2] 前節の議論で仮定した

$$D_2u(x,y)\bar{k}\leq 0,\quad (x,y)\in\mathrm{int}\mathbb{D},\quad \bar{k}\in\mathbb{R}^n_+$$

という条件は仮定する必要があるだろう. コストなしで投資を増やすことができるのであれば, 最適であっても横断性条件が成立しないかもしれない.

議論の前提として

$$k=(k_0,k_1,\ldots,k_T,k_{T+1},k_{T+2}\ldots)$$

が最適であるとしよう. 証明の方針は

$$\lim_{\lambda\to 1}\frac{u(k_T,\lambda k_{T+1})-u(k_T,k_{T+1})}{\lambda-1}=D_2u(k_T,k_{T+1})k_{T+1}$$

という公式を使って横断性条件に現れる $D_2u(k_T,k_{T+1})k_{T+1}$ に関する情報を調べるというものである.[3] $\lambda\in[0,1)$ として, 摂動を加えた経路

$$k'=(k_0,k_1,\ldots,k_T,\lambda k_{T+1},\lambda k_{T+2}\ldots)$$

を考えよう. 任意の t について $(k_t,k_{t+1})\in\mathrm{int}\mathbb{D}$ であるから, λ が十分 1 に近ければ $(k_T,\lambda k_{T+1})\in\mathbb{D}$ である. すべての $t\geq T+1$ について $(\lambda k_t,\lambda k_{t+1})\in\mathbb{D}$ を保証するためには, 最適経路の内点条件よりも強い条件を課さなければならない. なぜなら, 最適解が境界に収束するようなケースではどのような λ でも実行可能経路を構成することができない可能性があるからだ. このような微妙な問題を排除するためには $\mathbb{D}$ の凸性と $(0,0)\in\mathbb{D}$ を仮定すればよい. 任意の $\lambda\in[0,1]$ について $(\lambda k_t,\lambda k_{t+1})\in\mathbb{D}$ が成り立つ.

[2]横断性条件の必要性といわれることが多い.
[3]このテクニックは Kamihigashi (2002) によるものである.

k の最適性より,

$$\sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k'_t, k'_{t+1}) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k_t, k_{t+1}).$$

k' の構成により, これは

$$u(k_T, \lambda k_{T+1}) - u(k_T, k_{T+1}) \leq \sum_{t=T+1}^{\infty} \rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(\lambda k_t, \lambda k_{t+1})\right]$$

と同値である (十分性の証明と同様に, 級数の差が意味をもつような u のクラスを考えなければならない). 両辺を $1-\lambda$ で割ってやると

$$\begin{aligned}
\frac{u(k_T, \lambda k_{T+1}) - u(k_T, k_{T+1})}{1-\lambda} &\leq \sum_{t=T+1}^{\infty} \frac{\rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(\lambda k_t, \lambda k_{t+1})\right]}{1-\lambda} \\
&\leq \sum_{t=T+1}^{\infty} \rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(0,0)\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ [練習問題: 2 つ目の不等式を証明せよ [4]]. $\lambda \nearrow 1$ の極限を取ると

$$-D_2 u(k_T, k_{T+1}) k_{T+1} \leq \sum_{t=T+1}^{\infty} \rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(0,0)\right].$$

$T \to \infty$ の極限を取ると

$$0 \leq \lim_{T\to\infty} -D_2 u(k_T, k_{T+1}) k_{T+1} \leq \lim_{T\to\infty} \sum_{t=T+1}^{\infty} \rho^t \left[u(k_t, k_{t+1}) - u(0,0)\right] = 0$$

より横断性条件

$$\lim_{T\to\infty} -D_2 u(k_T, k_{T+1}) k_{T+1} = 0$$

がしたがう. 結果をまとめておこう.

定理 14. $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ は凸集合, $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ は有界な凹関数, $\mathbb{D}$ の内点で微分可能, 任意の $\bar{k} \in \mathbb{R}_+^m$ に対して $D_2 u(\cdot, \cdot)\bar{k} \leq 0$ が成り立つとする. さらに, $(0,0) \in \mathbb{D}$ であれば, 最適経路 $k = (k_t)_{t=0}^{\infty}$ は横断性条件

$$\lim_{T\to\infty} -\rho^T D_2 u(k_T, k_{T+1}) k_{T+1} = 0$$

を満たす.

[4] 補題 5 と同様の構造であることに注意.

参考文献

Jahn, J. (2007): *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Springer, third ed.

Kamihigashi, T. (2002): "A simple proof of the necessity of the transversality condition," *Economic Theory*, 20, 427–433.

Rudin, W. (1976): *Principle of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, third ed.