経済動学講義資料

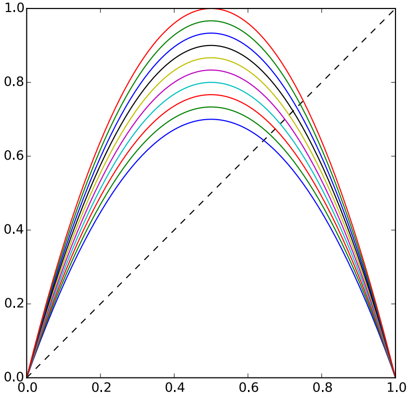
佐藤健治
mail@kenjisato.jp

2015/7/13–23

motivating example

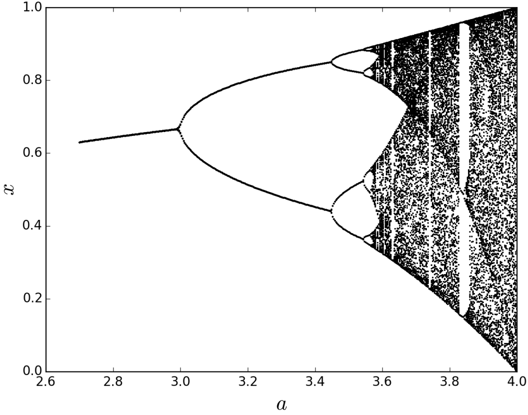
ロジスティック写像

$$f(x) = ax(1 - x)$$



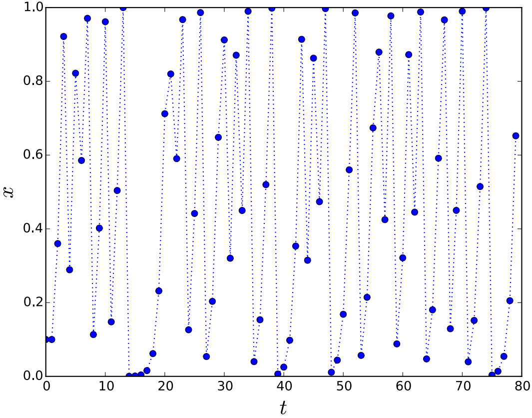
分岐図

a が大きくなると「複雑」な振る舞いが生じる



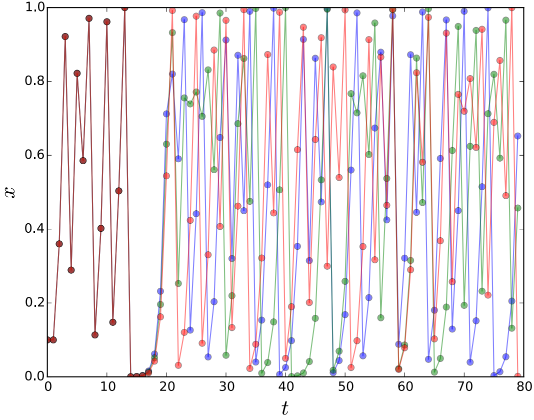
mixing

軌道が状態空間を動き回る



sensitivity

初期値の小さな違いが軌道を大きく変化させる



定義: 位相カオス

- $E \subset J$ 有限集合, $\sharp E =$ 要素数
- E は (n, ϵ)-separated $\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ x \neq y,$
  $\exists k = 0, 1, \ldots, n-1$ such that $|f^k(x) - f^k(y)| \geq \epsilon.$
- $s(n, \epsilon) = \max \{\sharp E \mid E : (n, \epsilon)\text{-separated}\}$

$$\psi_\epsilon(f, J) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon), \quad \psi(f, J) := \lim_{\epsilon \to 0} \psi_\epsilon(f, J)$$

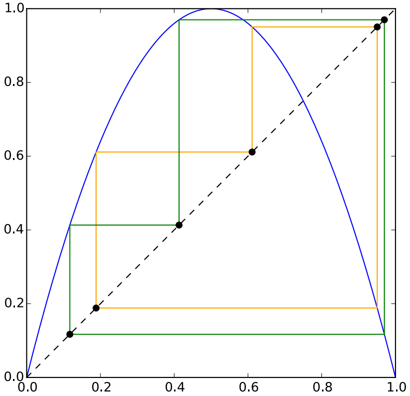
- $\psi(f, J) =$ 位相エントロピー
- 位相カオス $\Leftrightarrow$ 位相エントロピーが正であるような力学系

Period three implies chaos

- Tien-Yien Li and James A. Yorke (1975) "Period three implies chaos"
- 閉区間上の力学系 $f : J \to J$, (eg. $J = [0, 1]$)
  - f は連続関数
  - f は 3 周期解 $a = f^3(a)$, $f(a) \neq a \neq f^2(a)$ をもつ
  - このとき, f は位相カオス

3 周期解

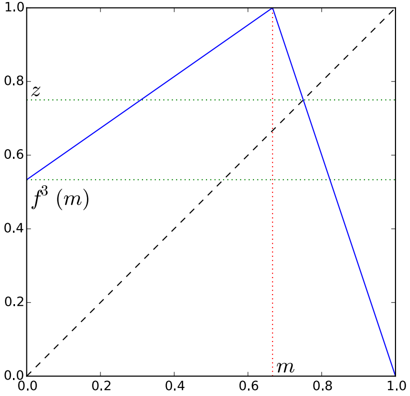
ロジスティック写像 ($a \geq 1 + 2\sqrt{2}$) は 3 周期解をもつ



分岐図: $1 + 2\sqrt{2}$ より小さい a でも複雑な動き
実はもっと弱い条件で位相カオスの存在を示せる

Mitra (2001, JET) の十分条件

$J \subset \mathbb{R}_+$, f: continuous with a single peak $m \in \mathrm{int} J$
$f^2(m) < m$, $f^3(m) < z = f(z)$
Then f exhibits topological chaos.



最適カオス

動学的経済モデル

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k_t, k_{t+1}) \quad \text{s.t.} \quad (k_t, k_{t+1}) \in \mathbb{D},\ t = 0, 1, \ldots$$

の最適動学関数

$$h \quad \text{with} \quad k^*_{t+1} = h(k^*_t),\ (k^*_t)_{t=0}^{\infty}:\ \text{optimal}$$

が位相カオスを生じさせることはあるだろうか？

2つのアプローチ

- 順問題
  - モデルを作る
    → 最適動学関数がカオスの十分条件を満たすか?
- 逆問題
  - カオスの十分条件を満たす関数を選ぶ
    → その関数が最適動学関数になるような u と ρ は存在するか?

Boldrin and Montrucchio (1986)

以下では, Boldrin and Montrucchio (1986, JET) による逆問題の概要を紹介する

Propblem (P)

$$v_\rho(k_0) = \max_{(k_t, k_{t+1}) \in \mathbb{D}} \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t u(k_t, k_{t+1}),$$

A.1 $K \subset \mathbb{R}^n_+$ is a convex body,
$\mathbb{D} \subset K \times K$ is also a convex body with $\pi_1(\mathbb{D}) = K$.

A.2 $u : K \times K \to \mathbb{R}$ is continuous, concave.
$u(k, \cdot)$ is strictly concave for every $k \in K$.

A.3 $u(k, k')$ is strictly increasing in k
and strictly deceasing in k'.

最適経路の存在

- A.1–A.3 のもとで, 最適経路が一意的に存在
- 最適経路は $k_t^* = h_\rho^t(k_0)$ と書ける

Fact 1

(a) $h_\rho : K \to K$ は連続関数

(b) $(0,1) \ni \rho \mapsto h_\rho \in C(K,K)$ は連続写像

静学問題の解 $\theta(k) := \arg\max \{u(k,k') \mid (k,k') \in \mathbb{D}\}$

(c) $\lim_{\rho \to 0+} h_\rho = \theta$, 収束は一様収束

(b) の証明は $\rho \mapsto v_\rho$ が ρ の連続写像になっていること (パラメタ付き縮小写像原理), Berge の最大値原理を使う

Fact 2

A.1–A.3 に加えて

(a) u is C^1

(b) $(k, 0) \in \mathbb{D}$, $\forall k \in K$,

を仮定.

このとき, ある ρ_* があって, 任意の $\rho \leq \rho_*$ について $h_\rho(k) \equiv 0$.

Fact 3

A.1–A.3 にいくつか仮定を追加 (McKenzie 1986). ある ρ^* が存在して任意の $\rho \geq \rho^*$ について, h_ρ は大域的に安定な不動点をもつ

$\rho \in (\rho_*, \rho^*)$ で何が起こるか？

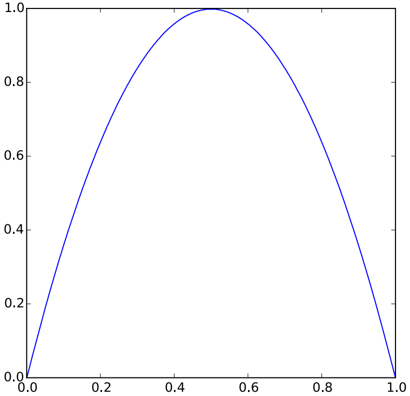
A.1–A.3 はダイナミクスを限定するには十分ではない
カオス的な挙動が発生する可能性あり

例: Boldrin–Montrucchio

```python
class BoldrinMontrucchio:

    def __init__(self):
        self.rho = 0.01072

    def u(self, x, y):
        return (-0.0857 * y**4 +
          0.1715 * y**3 - 0.3285 * y**2 -
          1.61 * y + 4 * x * y * (1 - x) -
          24 * x**2 + 150 * x)

    def is_feasible(self, x, y):
        return True
```

最適動学関数＝ロジスティック写像

policy iteration で計算した結果



準備

Lemma 1

A map $\theta : K \to K$ is the policy function $h_\rho$of the optimal growth model (P) under (A.1), (A.2) for a fixed value of ρ in $(0, 1)$, if and only if the following conditions are satisfied:

(i) There exists a real (concave) function $w(k, k')$ defined on $K \times K$ such that

$$\max_{k' : (k,k') \in \mathbb{D}} w(k, k') = w(k, \theta(k))$$

(ii) Setting $\psi(k) = w(k, \theta(k))$, the real function $w(k, k') - \rho\psi(k')$ satisfies the hypothesis (A.2).

必要性の証明

θ が最適動学関数であるとする．Bellman 方程式

$$
\begin{aligned}
v(k) &= \max_{k'} \left\{ u(k,k') + \rho v(k') \mid (k,k') \in \mathbb{D} \right\} \\
&= u(k, \theta(k)) + \rho v(\theta(k))
\end{aligned}
$$

より，$w(k,k') := u(k,k') + \rho v(k')$ は (i) の条件をみたす．
$\psi(k) = w(k,\theta(k)) = u(k,\theta(k)) + \rho v(\theta(k)) = v(k)$ に注意すると，

$$
\begin{aligned}
w(k,k') - \rho\psi(k') &= u(k,k') + \rho v(k') - \rho w(k', \theta(k')) \\
&= u(k,k') + \rho v(k') - \rho v(k') \\
&= u(k,k').
\end{aligned}
$$

十分性の証明

(i) を満たす $w(k,k')$ が存在し, $u(k,k') := w(k,k') - \rho\psi(k')$, $\psi(k) = w(k,\theta(k))$, が (A.2) を満たすとする.

$$
\begin{aligned}
\psi(k) &= w(k,\theta(k)) \\
&= \max_{k'} \left\{ w(k,k') \mid (k,k') \in \mathbb{D} \right\} \\
&= \max_{k'} \left\{ u(k,k') + \rho\psi(k') \mid (k,k') \in \mathbb{D} \right\} \\
&= u(k,\theta(k)) + \rho\psi(\theta(k)).
\end{aligned}
$$

ψ は価値関数, θ は最適動学関数である.

Corollary 1

A set of sufficient condition in order to obtain a map $\theta : K \to K$ as the optimal policy function h_ρ of problem (P) under (A.1), (A.2) for a given $\rho \in (0,1)$ is:

(i) $(k, \theta(k)) \in \mathbb{D}$ for every $k \in K$,

(ii) There exists a concave, real valued function $w(k, k')$ such that

$$\max_{k' \in K} w(k, k') = w(k, \theta(k))$$

(iii) Setting $\psi(k) = w(k, \theta(k))$, the real function $w(k, k') - \rho\psi(k')$ is concave in (k, k') and strictly concave in k'.

強凹性・弱凹性

$$u(k,k') \quad = \quad w(k,k') - \rho\psi(k')$$

が次の性質をもってほしい:

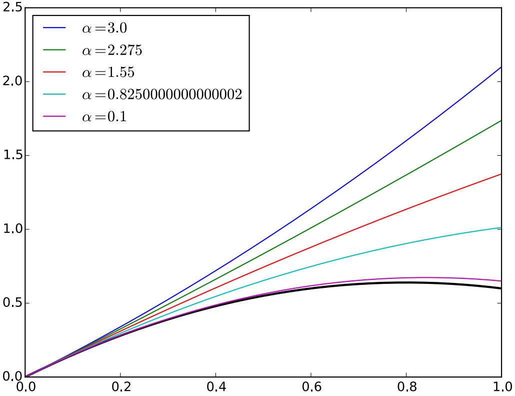
- (k,k') に関して凹
- k' に関して厳密に凹

凹性は減算に関して保存されないので限定された凹性の概念を導入する

凹関数と凸関数の差は凹関数であることに注意しておく

$f(x) + \frac{1}{2}\alpha\|x\|^2$

f: 凹関数, $\alpha \geq 0$
$f(x) + \frac{1}{2}\alpha\|x\|^2$ は α が小さいとき凹関数, α が大きいとき凸関数



強凹性

$\alpha \geq 0$ とする. $w(k, k')$ が $(0, \alpha)$-concave とは,

$$w(k, k') + \frac{1}{2}\alpha \|k'\|^2$$

が $K \times K$ 上の凹関数であることをいう.

強凹性の同値な条件

$w(k,k')$ が $(0,\alpha)$-concave
$\iff$ 任意の $k_1', k_2' \in K$, $t \in [0,1]$ に対して

$$
\begin{aligned}
& w(k, tk_1' + (1-t)k_2') \\
& \qquad \geq tw(k,k_1') + (1-t)w(k,k_2') + \frac{1}{2}\alpha t(1-t)\|k_1' - k_2'\|^2
\end{aligned}
$$

$w(k,k')$ が $(0,\alpha)$-concave, $\alpha > 0$, ならば w は (k,k') について凹関数, k' について厳密な凹関数

弱凹性

$\beta \geq 0$ とする. $\psi(k)$ が concave-β であるとは,
ψ が凹関数であり, かつ

$$\psi(k) + \frac{1}{2}\beta\|k\|^2$$

が凸関数であることをいう.

ψ が concave-β であるとき, $\rho\psi$ は concave-$(\rho\beta)$.
簡単な計算により確かめられる.

Lemma 4

$w(k,k')$ が $(0,\alpha)$-concave, $\psi(k')$ が concave-β, $\beta \leq \alpha$
$\Rightarrow$ $w(k,k') - \psi(k')$ は $(0,\alpha-\beta)$-concave.

[Proof] 凹関数と凸関数の差は凹関数なので,

$$
\begin{aligned}
& w(k,k') + \frac{1}{2}\alpha\|k'\|^2 - \left(\psi(k') + \frac{1}{2}\beta\|k'\|^2\right) \\
&= \left(w(k,k') - \psi(k')\right) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\|k'\|^2
\end{aligned}
$$

は凹関数.

$w(k,k') - \psi(k')$ は $(0,\alpha-\beta)$-concave

目標

最適動学関数の候補 $\theta : K \to K$ が与えられたとき

$$\begin{aligned} w(k, k') &: \quad (0, \alpha)\text{-concave}, \\ \psi(k) = w(k, \theta(k)) &: \quad \text{concave-}\beta \end{aligned}$$

であるような w を探す.

$\alpha - \rho\beta > 0$ であれば, $u(k, k') = w(k, k') - \rho\psi(k)$ が望ましい性質をもつ.

解空間の制限

w を探す範囲を次の関数形に限定する:

$$w(k, k') = -\frac{1}{2}\|k'\|^2 + (k' - \bar{k}, \theta(k)) - \frac{1}{2}L\|k\|^2,$$

ただし, (x, y) は x と y の内積. $\bar{k} \in K$, $L \in \mathbb{R}$.
θ は C^2 に限定する.

あきらかに,

$$\max_{k' \in K} w(k, k') = w(k, \theta(k))$$

をみたす (微分してゼロとしてみよ)

Lemma 2

$\theta \in C^2$ とする.
$\alpha \in [0,1)$, $L \geq \mu\sigma + \gamma^2/(1-\alpha)$

$$w(k,k') = -\frac{1}{2}\|k'\|^2 + (k' - \bar{k}, \theta(k)) - \frac{1}{2}L\|k\|^2$$

は $(0,\alpha)$-concave.

ただし

$$\gamma = \max_{k \in K} \|D\theta(k)\|, \ \sigma = \max_{k \in K} \|D^2\theta(k)\|, \ \mu = \max_{k_1,k_2 \in K} \|k_1 - k_2\|$$

Proof of Lemma 2

$L \geq \mu\sigma + \gamma^2/(1-\alpha)$ のとき

$$w^*(x,y) = -\frac{1}{2}(1-\alpha)\|y\|^2 + (y - \bar{y}, \theta(x)) - \frac{1}{2}L\|x\|^2$$

が凹関数であることを示す

固定した $x_0, y_0 \in K$ と $x_0 + tx_1, y_0 + ty_1 \in K$ について

$$f(t) = w^*(x_0 + tx_1, y_0 + ty_1)$$

が凹関数であることと同値. $\|x_1\| = 1$, $0 < \|y_1\| < \infty$ となるように x_1, y_1 を選べる. このとき

$$|t| = \|tx_1\| \leq \mu, \quad \|ty_1\| \leq \mu.$$

Proof of Lemma 2 (cont'd)

$$f(t) = -\frac{1}{2}(1-\alpha)\|y_0 + ty_1\|^2 + (y_0 + ty_1 - \bar{y}, \theta(x_0 + tx_1)) - \frac{1}{2}L\|x_0 + tx_1\|^2$$

$$\begin{aligned} &D_t^2(y_0 + ty_1 - \bar{y}, \theta(x_0 + tx_1)) \\ &= D_t^2\left[(y_0 - \bar{y}, \theta(x_0 + tx_1)) + (ty_1, \theta(x_0 + tx_1))\right] \\ &= (y_0 + ty_1 - \bar{y}, D_x^2\theta(x_0 + tx_1)(x_1, x_1)) \\ &\quad + 2(y_1, D_x\theta(x_0 + tx_1)x_1) \end{aligned}$$

Proof of Lemma 2 (cont'd)

$$
\begin{aligned}
f''(t) &= -L-(1-\alpha)\|y_1\|^2 \\
&\quad -(y_0+ty_1-\bar{y}, D_x^2\theta(x_0+tx_1)(x_1,x_1)) \\
&\quad\quad +2(y_1, D_x\theta(x_0+tx_1)x_1) \\
&\leq -L-(1-\alpha)\|y_1\|^2 \\
&\quad +\|y_0+ty_1-\bar{y}\|\|D_x^2\theta(x_0+tx_1)(x_1,x_1)\| \\
&\quad\quad +2\|y_1\|\|D_x\theta(x_0+tx_1)x_1\| \\
&\leq -L-(1-\alpha)\|y_1\|^2+\mu\sigma+2\gamma\|y_1\|
\end{aligned}
$$

Proof of Lemma 2 (cont'd)

$f''(t) \leq 0$ if

$$\mu\sigma + 2\gamma\|y_1\| - (1-\alpha)\|y_1\|^2 \leq L$$

左辺の最大値は $\|y_1\| = \gamma/(1-\alpha)$ のとき．したがって

$$\mu\sigma + 2\gamma^2/(1-\alpha) - \gamma^2/(1-\alpha) = \mu\sigma + \gamma^2/(1-\alpha) \leq L$$

のとき f は凹関数

Theorem 1

Let $\theta : K \to K$ be any C^2-map over K as in Lemma 2. Then for every given $\alpha \in [0, 1)$, there exists a C^2-function $W : K \times K \to \mathbb{R}$ such that

(i) $\max_{k'} w(k, k') = w(k, \theta(k))$

(ii) $w(k, k')$ is $(0, \alpha)$-concave over $K \times K$

ここまでの議論より明らか

Lemma 3

$$w(k, k') = -\frac{1}{2}\|k'\|^2 + (k' - \bar{k}, \theta(k)) - \frac{1}{2}L\|k\|^2,$$

とする．任意の $\beta \geq L + \mu\sigma$ について

$$\psi(k) = \max_{k' \in K} w(k, k') = w(k, \theta(k))$$

は concave-β.

Proof of Lemma 3

$$
\begin{aligned}
F(k) &= -\frac{1}{2}\|\theta(k)\|^2 + (\theta(k) - \bar{k}, \theta(k)) + \frac{1}{2}(\beta - L)\|k\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\theta(k)\|^2 - (\bar{k}, \theta(k)) + \frac{1}{2}(\beta - L)\|k\|^2
\end{aligned}
$$

が凸であるための条件を見つける.

$$
f(t) := F(k_0 + tk_1)
$$

とする. ただし, $k_0 \in K$, $\|k_0\| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, $k_0 + tk_1 \in K$, $\|k_1\| > 0$.

Proof of Lemma 3 (cont'd)

$$f''(t) = (D\theta(k_0 + tk_1)k_1, D\theta(k_0 + tk_1)k_1) \\ + (\theta(k_0 + tk_1) - \bar{k}, D^2\theta(k_0 + tk_1)(k_1, k_1)) + (\beta - L)\|k_1\|^2.$$

第 1 項は常に非負．Schwarz の不等式 $-\|a\|\|b\| \leq (a, b) \leq \|a\|\|b\|$ より

$$f''(t) \geq (\beta - L)\|k_1\|^2 - \mu\sigma\|k_1\|^2$$

したがって，

$$\beta \geq L + \mu\sigma$$

であれば $f''(t) \geq 0$.

Lemma 4

Let $w(k, k')$ be $(0, \alpha)$-concave and $\psi(k')$ concave-β, with $\beta \leq \alpha$. Then the difference $w(k, k') - \psi(k')$ turns out to be an $(0, \alpha - \beta)$-concave function on $K \times K$.

[Proof] これは既に証明済み.

Theorem 2

Take any $\theta \in C^2(K;K)$ such that $(k,\theta(k)) \in \mathbb{D}$ for every $k \in K$. Then there exists a discount parameter $\rho^* \in (0,1)$, the value of which depends on θ, such that for every fixed $0 < \rho < \rho^*$ we can construct a return function $u_\rho(k,k')$ satisfying (A.2) and with the following property: the optimal policy function h_ρ solving (P) under (A.1) and (A.2) with $u = u_\rho$, is the map θ. Moreover a lower bound for ρ^* can be estimated as

$$\rho^* \geq \rho^{**} = \frac{\gamma^2 + \mu\sigma - \gamma\sqrt{\gamma^2 + 2\mu\sigma}}{2\mu^2\sigma^2} > 0.$$

Proof of Theorem 2

ある u が存在して (A.2) を満たすためには

$$L \geq \frac{\gamma^2}{1-\alpha} + \mu\sigma \qquad (w \text{ is } (0,\alpha)\text{-concave})$$

$$\beta \geq L + \mu\sigma \qquad (\psi \text{ is concave-}\beta)$$

$$\alpha - \rho\beta > 0 \qquad (w - \rho\psi \text{ is strongly concave})$$

が同時に成り立てばよい．したがって
$\rho^* = \max\left\{\alpha/\beta : \beta - \mu\sigma \geq \gamma^2/(1-\alpha) + \mu\sigma\right\}$ を超えない ρ であればよい．

Proof of Theorem 2 (cont'd)

ρ^* の下界 ρ^{**} は

$$\rho^{**} = \max\left\{\alpha/\beta : L = \beta - \mu\sigma = \gamma^2/(1-\alpha) + \mu\sigma\right\}$$

を解いて求められる．ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha}{\beta} + \lambda\left(\beta - \mu\sigma - \frac{\gamma^2}{1-\alpha} - \mu\sigma\right)$$

と一階条件

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\beta} - \frac{\lambda\gamma^2}{(1-\alpha)^2} = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} &= -\frac{\alpha}{\beta^2} + \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \beta - \mu\sigma - \frac{\gamma^2}{1-\alpha} - \mu\sigma = 0
\end{aligned}$$

Proof of Theorem 2 (cont'd)

整理すると

$$\beta(1-\alpha)^2 - \alpha\gamma^2 = 0$$

$$\left(\frac{\gamma^2}{1-\alpha} + 2\mu\sigma\right)(1-\alpha)^2 - \alpha\gamma^2 = 0$$

$$\gamma^2(1-\alpha) + 2\mu\sigma(1-\alpha)^2 - \alpha\gamma^2 = 0$$

$$2\mu\sigma(1-\alpha)^2 + 2\gamma^2(1-\alpha) - \gamma^2 = 0$$

$$1-\alpha = \frac{-2\gamma^2 + 2\gamma\sqrt{\gamma^2 + 2\mu\sigma}}{4\mu\sigma} > 0$$

Proof of Theorem 2 (cont'd)

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{(1-\alpha)^2}{\gamma^2} \\
&= \frac{4\gamma^4 + 4\gamma^2(\gamma^2 + 2\mu\sigma) - 8\gamma^3\sqrt{\gamma^2 + 2\mu\sigma}}{16\mu^2\sigma^2\gamma^2} \\
&= \frac{8\gamma^4 + 8\gamma^2\mu\sigma - 8\gamma^3\sqrt{\gamma^2 + 2\mu\sigma}}{16\mu^2\sigma^2\gamma^2} \\
&= \frac{\gamma^2 + \mu\sigma - \gamma\sqrt{\gamma^2 + 2\mu\sigma}}{2\mu^2\sigma^2} \\
&= \rho^{**}
\end{aligned}
$$

Theorem 3

Assume $\theta \in C^2(K; K)$ is as defined in Theorem 2. Then for every $\rho' \in (0, \rho^*)$ with ρ^* given in Theorem 2, there exists a return function $u_{\rho'}$ depending on ρ' and satisfying (A.2), (A.3), such that θ is the optimal policy function h_ρ of the associated problem (P) with $u = u_{\rho'}$ when $\rho = \rho'$.

Proof of Theorem 3

関数族

$$w(k,k') = -\frac{1}{2}\|k'\|^2 + (k' - \bar{k}, \theta(k)) - \frac{L}{2}\|k\|^2$$

を 1 次の項を足した関数族 ($a \in \mathbb{R}_{++}$)

$$\bar{w}(k,k') = -\frac{1}{2}\|k'\|^2 + (k' - \bar{k}, \theta(k)) - \frac{L}{2}\|k\|^2 + (a, k)$$

で置き換えても定理 1, 2 はそのまま成り立つ

$$\bar{\psi}(k) = \bar{w}(k, \theta(k))$$

Proof of Theorem 3 (cont'd)

$$u_\rho(k,k') = \bar{w}(k,k') - \rho\bar{\psi}(k')$$

の 1 次偏導関数

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\rho}{\partial k} &= D\theta(k)^\top(k' - \bar{k}) - Lk + a \\
\frac{\partial u_\rho}{\partial k'} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial k'}(k,k') - \rho\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial k}(k') \\
&= -k' + \theta(k) - \rho\left(D\theta(k')^\top(\theta(k') - \bar{k}) - Lk' + a\right) \\
&= -(1-\rho L)k' - \rho a + \theta(k) + \rho D\theta(k')^\top(\bar{k} - \theta(k'))
\end{aligned}$$

a を十分大きく取れば, Theorems 1, 2 の結果をたもったまま $\frac{\partial u_\rho}{\partial k} > 0$, $\frac{\partial u_\rho}{\partial k'} < 0$ とできる

Proof of Theorem 3 (cont'd)

$\frac{\partial u_\rho}{\partial k} > 0$ を成り立たせるには,

$$a \quad > \quad -D\theta(k)^\top(k' - \bar{k}) + Lk$$

が成り立てばよいので, $i = 1, \ldots, n$ について

$$a_i > \gamma\mu + LN$$

が成り立てば十分. ただし, $N = \max\{\|k\| \mid k \in K\}$

Proof of Theorem 3 (cont'd)

$\frac{\partial u_\rho}{\partial k'} < 0$ を成り立たせるには,

$$a > \frac{-(1-\rho L)k' + \theta(k) + \rho D\theta(k')^\top(\bar{k} - \theta(k'))}{\rho}$$

が成り立てばよいので, $i = 1, \ldots, n$ について

$$a_i > LN + \frac{N}{\rho} + \gamma\mu$$

となればよい. この条件が成り立つなら先ほどの条件 $a_i > \gamma\mu + LN$ は自明に成り立つ

$f(x) = 4x(1-x),\ x \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4 - 8x \\
f''(x) &= -8
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \|f'\| = 4 \\
\sigma &= \|f''\| = 8 \\
\mu &= \max_{x,y \in [0,1]} |x - y| = 1 \\
N &= \max_{x \in [0,1]} |x| = 1
\end{aligned}
$$

$f(x) = 4x(1-x)$ (cont'd)

定理 2 より

$$\begin{aligned}\rho^{**} &= \frac{\gamma^2 + \mu\sigma - \gamma\sqrt{\gamma^2 + 2\mu\sigma}}{2\mu^2\sigma^2} \\ &= 0.0107233047033631\ldots\end{aligned}$$

を超えない ρ を選べばよい. Boldrin–Montrucchio は

$$\rho = 0.01072$$

と選んでいる

$f(x) = 4x(1-x)$ (cont'd)

Lemma 2, Theorem 2, Theorem 3 の条件を満たす L, a を探して代入すると, 例えば

$$
\begin{aligned}
u_\rho(x,y) = {} & -4x^2y - 23.31370851x^2 + 4xy + 150x \\
& - 0.08576y^4 + 0.1715y^3 - 0.3358368217y^2 - 1.608y
\end{aligned}
$$

が見つかる

注: p. 37, Eq. (12) と異なっているが, 解の候補は無数に見つかるはずなので, 細かい違いは問題にならない. ただし, Eq. (12) で使われている $\rho = 0.01072$, $L = 48$ に対しては $L \geq \gamma^2/(1-\alpha) + \mu\sigma$, $\beta \geq L + \mu\sigma$, $\alpha - \rho\beta > 0$ を同時に満たす α, β は存在しないので, Eq. (12) の導出方法は不明

まとめ

- コンパクト集合上の 2 階微分可能な力学系は適切な既約型効用関数と割引因子を選べば Ramsey 問題の解にできる
- したがって, 解軌道がカオス的に振る舞う Ramsey 問題は無数に存在する