

基本事項のまとめ

経済動学 2016Q1
資料番号: 16ED01

mail@kenjisato.jp

2016年4月8日

1 数

実数全体の集合 \mathbb{R} と複素数全体の集合 \mathbb{C} は、四則演算が定義されており (他の都合の良い性質と合わせて), 体 (たい, field) と呼ばれる代数的構造をなす. \mathbb{R} あるいは \mathbb{C} のどちらにも成り立つ主張には「体 \mathbb{F} 上の...」という表現を用いることがある.¹ 他には有理数の集合 \mathbb{Q} なども体であるが, 解析学を展開する上では都合が悪い.

通常, 経済モデルが複素変数や複素パラメータを持つことはないが, 複素数の扱いから解放されるというわけではない. その理由は \mathbb{C} が代数的閉体 (algebraically closed field) であって, \mathbb{R} はそうでないという事実による (Cf. 代数学の基本定理). 固有値は一般に複素数になるので, 行列の標準化 (対角化, ジョルダン標準化, 上三角化など) をすべて \mathbb{C} の上で実行できるが \mathbb{R} にはこのような性質はない. 従って, 実数行列に標準化を施した結果は一般には複素行列である.

経済現象の分析とはいえ複素数の取り扱いを避け続けることはできないので簡単におさらいしておこう. 以下の点は, 今後断りなく使用されるので, 忘れていた人は復習しておくこと.

虚数単位 虚数単位 (unit imaginary number) とは, 2次方程式

$$x^2 = -1$$

の2つある解のうち的一方である. この数を j と書く (i や i あるいは j と書いたり, もっと直接的な表現 $\sqrt{-1}$ を使ったりもする). 解の一方を決めると, もう1つの解は自動的に $-j = -1 \times j$ に定まる. これを確認するためには

$$(-j)^2 = (-1)^2 \times j^2 = 1 \times (-1) = -1$$

となることを見ればよい.

¹体を表すアルファベットは F 以外にも, Körper の頭文字 K が使われることがある.

複素数 複素数 (complex number) とは, 実数 a, b に対して,

$$a + bj$$

と表される数のことである. つまり,

$$\mathbb{C} = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

である. このような集合表記は頻繁に使われるので慣れておいてほしい. 複素数 $z = a + bj$ に対して, a を z の実部 (real part), b を z の虚部 (imaginary part) という. $0j = 0$ と了解することで, \mathbb{R} は \mathbb{C} の部分集合となる. すなわち,²

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a = a + 0j \in \mathbb{C}.$$

複素数は 2 つの実数のペアとして表現することができる. 象徴的には

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$$

書いてよいだろう. 一対一の対応関係

$$a + bj \leftrightarrow (a, b)$$

によって, 1 つの複素数を 2 次元平面上の 1 点と同一視することができる. この平面を複素平面 (complex plane) という.

四則演算 複素数の加算, 減算, 乗算は以下のように定義される.

$$(a_1 + b_1j) + (a_2 + b_2j) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j$$

$$(a_1 + b_1j) - (a_2 + b_2j) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)j$$

$$(a_1 + b_1j)(a_2 + b_2j) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)j$$

除算は $a_2 \neq 0 \neq b_2$ として,

$$\frac{a_1 + b_1j}{a_2 + b_2j} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right)j.$$

²集合 A が集合 B の部分集合 ($A \subset B$) であることを示すためには, 「 $a \in A$ とすれば $a \in B$ が成り立つ」ことを言えばよい. ちなみに, 2 つの集合が一致することを示すためには, $A \subset B$ と $B \subset A$ の両方が成り立つことを示せばよい. この論法はよく使うので覚えておくこと.

実用上は j を実変数と同じように扱って計算し、 j^2 が現れたときに -1 で置き換えていけばよい。例えば、除算の公式は次のように「導出」できる。

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1j}{a_2 + b_2j} &= \frac{(a_1 + b_1j)(a_2 - b_2j)}{(a_2 + b_2j)(a_2 - b_2j)} \\ &= \frac{a_1(a_2 - b_2j) + b_1j(a_2 - b_2j)}{a_2(a_2 - b_2j) + b_2j(a_2 - b_2j)} \\ &= \frac{a_1a_2 - a_1b_2j + a_2b_1j - b_1b_2j^2}{a_2^2 - a_2b_2j + a_2b_2j - b_2^2j^2} \\ &= \frac{a_1a_2 - a_1b_2j + a_2b_1j - b_1b_2(-1)}{a_2^2 - b_2^2(-1)} \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) j. \end{aligned}$$

共役複素数 複素数 $z = a + bj \in \mathbb{C}$ の共役複素数 (complex conjugate) とは

$$a - bj$$

によって定義される複素数のことである。通常 \bar{z} と書く。実数 $a = a + 0j$ に対しては、その共役複素数は $\bar{a} = a - 0j = a$ である。 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 - z_2} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{aligned}$$

および $z_2 \neq 0$ であれば

$$\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$$

が成り立つ。

先ほど、 $x^2 + 1 = 0$ の解が $\{j, -j\}$ であることを説明した。複素数 j とその共役複素数 $-j$ が解になっている。これは偶然ではなく、実数係数の多項式方程式一般に成り立つ事実である。複素数解とその共役複素数は必ずペアになって現れる。実数係数 a_0, \dots, a_n を持つ多項式方程式

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

の解 $z \in \mathbb{C}$ は

$$a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n = 0$$

を満たす。両辺の共役複素数を取り、実数の共役複素数はその実数自身であることと、積の共役複素数が共役複素数の積であることを使うと

$$a_0 + a_1\bar{z} + \dots + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + a_n\bar{z}^n = 0$$

を得るので \bar{z} もまた解である。

オイラーの公式 平面上の1点は原点から点までの距離 $r \geq 0$ と半直線 $a > 0$ を起点とした反時計回りの回転角 θ により特定できる. すなわち

$$z = a + bj \leftrightarrow (a, b) \leftrightarrow (r, \theta)$$

という対応関係がある. 今,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ a &= r \cos \theta \\ b &= r \sin \theta \end{aligned}$$

であることに注意すれば

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

が得られる. オイラーの公式とは

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

が成立することを主張するもので, すべての複素数は極形式 (polar form) とよばれる

$$z = re^{j\theta}$$

という表現を持つことがわかる. 非負の実数 $r = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ を z の絶対値 (absolute value), θ を偏角 (argument) とよぶ. 極形式が便利な理由は, 複素数の積を回転と伸長によって幾何学的に解釈できるからである.

$$\begin{aligned} z_0 &= r_0 e^{j\theta_0} \\ z &= r e^{j\theta} \end{aligned}$$

とすれば,

$$zz_0 = (rr_0)e^{j(\theta_0+\theta)}$$

であるから「 z_0 に z を掛ける」という操作は, 「原点と z_0 を端点とする線分 Oz の長さを r 倍にし, 原点を中心として時計回りに θ (ラジアン) だけ回転する」ことと同じことである. あるいは $z = re^{j\theta}$ に対して z^n を計算してみよう. $r < 1, \theta \neq 0$ のときには $z^n, n = 1, 2, 3, \dots$ は原点の周りを回転しながら原点に収束し, $r > 1$ であれば無限遠点に向かって発散する様子がイメージできればよい. この事実は, 離散時間動学系の不動点の安定性を評価するための基礎的な性質なので十分に理解しておいてほしい.

2 収束・発散

経済動学では解析学の手法を多用するため, 極限の操作についてある程度習熟していないと論文を読むことも難しいだろう.

数の収束・発散 例えば, 「実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 x に収束する」という数学的表現はイメージとしてはもちろん「 n を大きくしていくと x_n は x に近く」ということを表しているが, 厳密には次のように定義される: 任意の $\epsilon > 0$ についてある N が存在して $n > N$ であれば $|x_n - x| < \epsilon$ が成り立つ. これを $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ と書くのである.

「発散する」というのは, いくらでも大きな数字になるということであるが, 正数列が発散する場合には厳密には次のように定義される: 任意の M についてある n が存在して $x_n > M$ が成り立つ. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ というように書くこともあるが, ∞ という数があるわけではないので, あくまでも象徴的な表記として理解しておけばよい.

収束も発散もしない点列というのも存在する. 例えば $x_{2n+1} = +1, x_{2n} = -1, n = 0, 1, 2, \dots$ で定義される数列は原点の周りを離れもせず近づきもせずに行ったり来たりし続ける. このような場合には, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

ベクトル列の収束・発散 ベクトルについてはいずれ詳しく復習することになるが, ここで簡単に収束概念のおさらいをしておこう. ベクトル列 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ の収束性を議論する場合には距離関数を導入する必要がある. 通常はノルムと呼ばれる関数 $\|\cdot\|$, 例えば $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, を定義し, $\|x - y\|$ を 2 ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ の間の距離とすることが多い. この距離に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ を次のように定義できる: 任意の $\epsilon > 0$ に対してある N が存在して, $n > N$ ならば $\|x_n - x\| < \epsilon$ が成り立つ. 先ほどの数列の場合とほとんど同じであることがわかんと思う. 大げさな言い方をすれば, 絶対値は実数全体からなるベクトル空間におけるノルムなのである. 発散についても同じことなので, 各自考えてほしい.

関数の収束・発散 ベクトルの収束概念が分かっしまえば, 関数列の収束を定義する方法を想像できるだろう. 関数を作る空間にノルムを導入し, 距離を作り, それを使って上と同じ収束定義をすればよい.

土台は何? 前述の収束性定義において共通する構造は何かというと

$$x_n - x$$

の長さを測れるということである. 長さを表す関数が定義に踏み込む以前に, $x_n - x$ が定義されている必要があることが分かってもらえるだろうか. ベクトルとベクトル, あるいは関数と関数の引き算である. このような操作を自由に行える空間が「線形空間」(linear space) あるいは同じことだが「ベクトル空間」(vector space) と呼ばれる対象である. 解析学を展開する土台として線形空間論 (線形代数学) はとても重要なのである.

3 数列, 複素数, 動学, 行列

時系列分析の基本モデルとして使われる自己回帰 (autoregressive) モデル

$$x_{t+2} = a_1 x_{t+1} + a_0 x_t$$

を考えてみよう. この関係式は初期値 x_0, x_1 を決めれば数列 $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ を決定できる. 今,

$$\begin{bmatrix} x_{t+2} \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{bmatrix}$$

に注意しておこう. 一般解 x_t を求めることは行列のべき上

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t$$

を求めることに外ならない. なぜなら

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

だからである. 例として

$$a_0 = -\frac{1}{2}, \quad a_1 = 1$$

としてみよう. 行列

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

は次のように行列の積に分解できる (確認せよ):

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+j}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-j}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-j}{2} & \frac{j}{2} \\ \frac{1+j}{2} & -\frac{j}{2} \end{bmatrix} = VDW.$$

ここで

$$WV = \begin{bmatrix} \frac{1-j}{2} & \frac{j}{2} \\ \frac{1+j}{2} & -\frac{j}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

に注意すると,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t &= (VDW)^t = VD(WV)D(W \cdots V)D(WV)DW \\ &= VD^tW \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+j}{2}\right)^t & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-j}{2}\right)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-j}{2} & \frac{j}{2} \\ \frac{1+j}{2} & -\frac{j}{2} \end{bmatrix} \\ &= (\star) \end{aligned}$$

が得られる.

$$\frac{1+j}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}j}, \quad \frac{1-j}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}j}$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}
 (\star) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}j} & \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t e^{j\frac{\pi}{4}t} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t e^{-j\frac{\pi}{4}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} & \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}} & \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}j} & \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+1} e^{j\frac{\pi}{4}(t-1)} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+2} e^{j\frac{\pi}{4}(t+2)} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+1} e^{-j\frac{\pi}{4}(t-1)} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+2} e^{-j\frac{\pi}{4}(t+2)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+1} e^{j\frac{\pi}{4}(t-1)} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+1} e^{-j\frac{\pi}{4}(t-1)} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+2} + e^{j\frac{\pi}{4}(t+2)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+2} e^{-j\frac{\pi}{4}(t+2)} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t e^{j\frac{\pi}{4}(t-2)} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t e^{-j\frac{\pi}{4}(t-2)} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+1} e^{-j\frac{\pi}{4}(t+1)} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+1} e^{-j\frac{\pi}{4}(t+1)} \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{t+1} \begin{bmatrix} e^{j\frac{\pi}{4}(t-1)} + e^{-j\frac{\pi}{4}(t-1)} & \frac{j}{\sqrt{2}} \left(e^{j\frac{\pi}{4}t} - e^{-j\frac{\pi}{4}t}\right) \\ -\sqrt{2}j \left(e^{j\frac{\pi}{4}t} - e^{-j\frac{\pi}{4}t}\right) & e^{-j\frac{\pi}{4}(t+1)} + e^{-j\frac{\pi}{4}(t+1)} \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}(t-1) & -\sin \frac{\pi}{4}t \\ 2 \sin \frac{\pi}{4}t & \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}(t+1) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

これが,

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t$$

と一致する.