

# 線形空間

経済動学 2016Q1  
資料番号: 16ED03

mail@kenjisato.jp

2016年4月25日

これまでは縦横に数字を並べたものとして行列を定義したが,これから線形空間の間の線形写像を表現としたものとして定式化する. 数ベクトル空間  $\mathbb{F}^{n \times 1}$  を超えてより抽象的な線形空間の理論を持ち出す理由は, さもなくばシステム表現の変更に際して「変化しない実体」を見失ってしまう恐れがあるからである. 対角化やジョルダン標準形の理論, システムの正準形を理解する上で重要な役割を果たす.

## 1 線形空間

### 1.1 定義

$X$  を集合,  $\mathbb{F}$  を体とする.

定義 1.  $X$  が  $\mathbb{F}$  上の線形空間 (ベクトル空間, linear space over  $\mathbb{F}$ ) であるとは, 和

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$$

とスカラー倍

$$X \times \mathbb{F} \ni (x, \alpha) \mapsto \alpha x \in X$$

が定義されていて,<sup>1</sup> 以下の諸条件を満たすことをいう. 線形空間の元をベクトルと呼ぶ.

- 任意の  $x, y, z \in X$  に対して,  $(x + y) + z = x + (y + z)$  が成り立つ.
- 任意の  $x, y \in X$  に対して,  $x + y = y + x$  が成り立つ.
- 任意の  $x \in X$  に対して  $\theta + x = x$  なる  $\theta \in X$  が存在する. これをゼロベクトルと呼び,  $0$  で表す.

---

<sup>1</sup>写像  $f$  の定義域 (domain) が  $X$ , 終域 (codomain) が  $Y$  であるとき  $f: X \rightarrow Y$  と書く. すなわち, 任意の  $x \in X$  について  $f(x)$  が  $Y$  の元として1つ定まる, ということをも  $f: X \rightarrow Y$  で表す. 一方,  $f: x \mapsto y$  という表現もしばしば用いられる. 矢印の形が少し違うだけだが, 用途がかなり違うので注意が必要である.  $f: x \mapsto y$  と書いたとき,  $x$  は  $f$  によって  $y$  に写されるという意味になる. 従って,  $x$  も  $y$  も既知であるようなときにその対応関係を  $f$  によって表すという意味で使われる. 上の場合は,  $+$  という記号を和の写像を表すのに使うという程度の意味である.

- 任意の  $x \in X$  に対して,  $x + x' = 0$  なる  $x' \in X$  が存在する. これを逆元と呼び  $-x$  で表す.
- 任意の  $x \in X$  と  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  に対して,  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  が成り立つ.
- 任意の  $x \in X$  と  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  に対して,  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  が成り立つ.
- 任意の  $x \in X$  と  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  に対して,  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  が成り立つ.
- 任意の  $x \in X$  について,  $1x = x$ .

例 2. 数ベクトル空間  $\mathbb{F}^n$

$$\mathbb{F}^n = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

は成分ごとの和とスカラー倍によってベクトル空間となる.

例 3.  $m \times n$  行列全体の集合は線形空間をなす. 資料 [16ED02] の第 1 節を参照.

例 4. 高々  $n$  次の多項式全体の集合  $P^n[z]$  も通常の和と定数倍に関してベクトル空間となる.

例 5. 数列全体の空間  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  も成分ごとの和とスカラー倍を導入すると  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間となる.

例 6. 有限期待値を持つ実確率変数の空間は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間となる.<sup>2</sup>

## 1.2 線形部分空間

定義 7.  $X$  を  $\mathbb{F}$  上の線形空間,  $Y$  を  $X$  の部分集合とする.  $Y$  が  $X$  に定義された演算について線形空間になるとき,  $Y$  は  $X$  の線形部分空間であるという.

$X$  自身と  $\{0\}$  は必ず線形部分空間になる.

事実 8.  $Y$  が  $X$  の線形部分空間であるための必要十分条件は,  $Y$  が和とスカラー倍について閉じていることである. すなわち, 任意の  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $\alpha \in \mathbb{F}$  について,  $y_1 + y_2 \in Y$  と  $\alpha y_1 \in Y$  が成り立つことを確認すればよい.

証明. 確認せよ. □

定義 9. ベクトル  $x_1, \dots, x_n \in X$  をすべて含む最小の線形部分空間を,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  によって張られる線形部分空間といい,  $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$  と書く.

$$\text{span}\{x_1, \dots, x_n\} = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

である. なお,  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  の形のベクトルは  $\{x_1, \dots, x_n\}$  の 1 次結合であるという.

<sup>2</sup> $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$  といった式が成り立つ.

2つの部分空間  $Y, W$  があつたとき,  $Y \cap W$  はまた線形部分空間になる. 一方,  $Y \cup W$  は一般には線形部分空間にならない.

**定義 10.**  $X$  を  $\mathbb{F}$  上の線形空間,  $Y, W$  を  $X$  の線形部分空間とする. 部分空間の和  $Y + W$  は  $Y$  と  $W$  の元をすべて含む最小の線形部分空間と定義される. すなわち

$$Y + W = \{\alpha y + \beta w \mid y \in Y, w \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{F}\}. \quad (1)$$

上の定義 (1) は和とスカラー倍について閉じているように作られているので部分空間となる.

**定義 11.**  $M, N$  を  $X$  の線形部分空間,  $M \cap N = \{0\}$  とする. 和  $M + N$  を特に直和といい,  $M \oplus N$  と記す.

**事実 12.**  $M \oplus N$  のベクトル  $x$  は一意的な分解  $x = u + v$ ,  $u \in M, v \in N$  をもつ.

**証明.**  $M$  の非ゼロ元と  $N$  の非ゼロ元が常に 1 次独立であることを確認すればよい.  $u, u' \in M$  と  $v, v' \in N$  がともに  $x = u + v$  と  $x = u' + v'$  を満たすとしよう.  $u - u' = v' - v \in M \cap N = \{0\}$  より  $u = u'$  と  $v = v'$  が分かる.  $\square$

### 1.3 1 次独立性

**定義 13.** ベクトル  $x_1, \dots, x_d \in X$  が 1 次独立であるとは,

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_d x_d = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0$$

が成り立つことをいう. 1 次独立でないとき 1 次従属であるという.

ベクトルの組  $\{x_1, \dots, x_d\}$  が 1 次従属であれば, そのうちの 1 つが他のベクトルの 1 次結合でかける. 例えば, 1 つはゼロでない  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  が存在して,

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_d x_d = 0$$

となるとする. 一般性を失うことなく,  $\alpha_1 \neq 0$  とできて

$$x_1 = \sum_{k=2}^d -\frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_k$$

と書ける. 逆も成り立つことが簡単に示せるので, 確認しておくこと.

**定義 14.** ある自然数  $N$  が存在し,  $N$  個より大きい数のベクトルの組が必ず 1 次従属になるとき,  $X$  は有限次元であるという. そのような  $N$  が存在しないとき,  $X$  は無限次元であるという.

**定義 15.** 有限次元ベクトル空間  $X$  のベクトルの組  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  が基底であるとは,  $V$  が 1 次独立であり,  $V$  に  $X$  のいかなるベクトルを加えても必ず 1 次従属になることをいう. あるいは同じことだが,  $\text{span}(V) = X$ .

事実 16.  $X$  を  $\mathbb{F}$  上の有限次元ベクトル空間,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  を  $X$  の任意の基底とする. 任意の  $x \in X$  は  $\{v_1, \dots, v_n\}$  の線形結合で書ける. すなわち,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$  があって

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

となる. この表現は (基底ごとに) 一意に定まる.

証明. 確認せよ. □

定理 17. 有限次元ベクトル空間の基底の数は基底の選び方にかかわらず一定である.

証明.  $X$  を有限次元ベクトル空間とする.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  と  $\{w_1, \dots, w_m\}$  がともに基底であるとしよう.  $m \neq n$  を仮定して矛盾を導く. 一般性を失うことなく  $m > n$  としてよい.  $w_1, \dots, w_m$  はすべて  $v_1, \dots, v_n$  の 1 次結合でかけるので,

$$w_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{F}, \quad i = 1, \dots, m.$$

$\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{F}$  を  $\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m = 0$  が成り立つ数としよう.

$$\begin{aligned} \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m &= \sum_{i=1}^m \beta_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_{ij} \right) v_j \end{aligned}$$

であり,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  は基底であるから,

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \alpha_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{2}$$

が成り立たなければならない. 線形方程式を行列表示すると

$$[\beta_1 \quad \dots \quad \beta_m] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = 0.$$

同値な変形を施して,

$$[\beta_1 \quad \dots \quad \beta_m] P^{-1} \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{(m-n) \times n} \end{bmatrix} Q^{-1} = 0$$

を得る.<sup>3</sup> さらに右から  $Q$  をかければ

$$[\beta_1 \quad \dots \quad \beta_m] P^{-1} \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{(m-n) \times n} \end{bmatrix} = [\tilde{\beta}_1 \quad \dots \quad \tilde{\beta}_m] \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{(m-n) \times n} \end{bmatrix} = 0.$$

<sup>3</sup>資料 [16ED02] を参照.

したがって,

$$[\tilde{\beta}_1 \ \cdots \ \tilde{\beta}_m] = [0 \ \cdots \ 0 \ c_{n+1} \ \cdots \ c_m]$$

である.  $c_{n+1}, \dots, c_m$  は任意の定数. 逆変形を行えば

$$[\beta_1 \ \cdots \ \beta_m] = [0 \ \cdots \ 0 \ c_{n+1} \ \cdots \ c_m] P$$

より,  $\beta_1, \dots, \beta_m$  のすべてがゼロでなくても (2) を成り立たせることができることが分かる (右から掛ける  $P$  は列基本変形であることに注目する).  $\{w_1, \dots, w_m\}$  が基底であることに矛盾する.  $\square$

**定義 18.** 有限次元ベクトル空間  $X$  の基底に含まれるベクトルの数は空間固有の量である. これを次元と呼び  $\dim X$  と書く.<sup>4</sup>

**定理 19.**  $X$  を  $n$  次元ベクトル空間とする. 1次独立なベクトルの組  $\{x_1, \dots, x_r\} \subset X$ ,  $r < n$ , に  $(n-r)$  本のベクトル  $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$  を付け加えて  $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$  が  $X$  の基底となるようにできる.

**証明.**  $\{v_1, \dots, v_n\}$  を  $X$  の基底とする.  $v_1, \dots, v_n$  の中に  $x_1, \dots, x_r$  の1次結合で書けないものが存在する. さもなくば  $\{x_1, \dots, x_r\}$  が基底となり, 定理 (17) により矛盾.  $v_1$  がそのような元であるとしよう. すると  $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$ ,  $x_{r+1} := v_1$ , は1次独立になる. これが基底であれば終了, そうでなければ  $\{v_2, \dots, v_n\}$  の中に  $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}\}$  の1次結合で書けないものが存在する. このような手続きを  $n-r$  回実行すれば基底  $\{x_1, \dots, x_n\}$  を構成できる.  $\square$

## 2 線形写像

### 2.1 基本的な定義の復習

$X, Y$  を集合とする. 以下の概念は基本的である.

**写像・グラフ** 集合  $M$  を  $X \times Y$  の部分集合であって, 任意の  $x \in X$  について  $(x, y) \in M$  を満たす  $y \in Y$  が必ず存在し, しかもその数が1つだけであるものとしよう. この  $y$  を  $f(x)$  と書けば  $M = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$  が成り立っている.  $M$  によって定まる  $x$  から  $y$  への対応関係 ( $x \mapsto y$ ) を  $X$  から  $Y$  への写像 (mapping) といい,  $f: X \rightarrow Y$  と書く.  $M$  を  $f$  のグラフ (graph) といい,  $\text{graph} f$  と書く.

**像・逆像**  $f: X \rightarrow Y$ ,  $M \subset X$  に対して,

$$f(M) = \{f(x) \in Y \mid x \in M\} \subset Y$$

を  $M$  の  $f$  による像 (image) という.  $f(X)$  を  $\text{im} X$  と書くこともある.

$N \subset Y$  に対して,

$$f^{-1}(N) = \{x \in X \mid f(x) \in N\} \subset X$$

を  $N$  の  $f$  による逆像 (inverse image) と呼ぶ. 逆像は空集合となることもある.

<sup>4</sup> $\dim X < \infty$  や  $\dim X = \infty$  と書いてそれぞれ有限次元ベクトル空間, 無限次元ベクトル空間であることを表すことがある.

恒等写像 写像  $x \mapsto x$  を恒等写像といい  $\text{Id}_X$  あるいは  $I_X$  と書く.

全射 任意の  $y \in Y$  について,  $x \in X$  が存在して  $y = f(x)$  が成り立つとき,  $f$  は全射 (surjection, onto mapping) であるという.<sup>5</sup>

単射  $f(x_1) = f(x_2)$  ならば  $x_1 = x_2$  が成り立つとき,  $f$  は単射 (injection, one-to-one mapping) であるという.

全単射・逆写像 全射かつ単射である写像を全単射 (bijection, one-to-one and onto mapping) という.  $f: X \rightarrow Y$  を全単射とすれば,  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  を

$$\text{graph}f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \text{graph}f\}$$

によって定義できる.  $f^{-1}$  を  $f$  の逆写像 (inverse) という.

合成写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  に対して, 写像  $X \rightarrow Z$  を

$$x \mapsto g(f(x))$$

によって定める. これを  $f$  と  $g$  の合成写像といい,  $g \circ f$  と記す. 全単射  $f: X \rightarrow Y$  に対して,  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X, f \circ f^{-1} = \text{Id}_Y$  である. 写像の合成には結合法則が成り立つ. すなわち

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

したがって,  $f \circ g \circ h$  などと書いても曖昧さは生じない.

## 2.2 線型性

定義 20.  $X, Y$  を  $\mathbb{F}$  上の線形空間とする. 写像  $f$  が線形であるとは, 任意の  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, x_1, x_2 \in X$  について

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

が成り立つことをいう.

写像が線形である場合,  $f(x)$  と書かずに括弧を省略して  $fx$  と書くこともある. 無限次元空間の間の写像を作用素 (operator) ということもある.

$X$  と  $Y$  の間に全単射線形写像を (線形) 同型写像という. 同型写像が存在するとき,  $X$  と  $Y$  は同型であるといい,  $X \simeq Y$  と書く.

例 21. 期待値が有限である実数値確率変数の空間における期待値作用素  $\mathbb{E}$  は線形である. (本質的には積分の線形性である.)

---

<sup>5</sup> $f: X \rightarrow Y$  は通常, “ $f$  maps  $X$  into  $Y$ ” と読むが,  $f$  が全射のときは “ $f$  maps  $X$  onto  $Y$ ” と読む.

例 22.  $P^n[x]$  をたかだか  $n$  次の多項式が作る線形空間とする. すなわち

$$P^n[x] = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

微分作用素

$$\frac{d}{dx} : \sum_{k=0}^n a_k x^k \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

は線形である.

### 2.3 像空間, 核, 商空間

$X, Y$  を  $\mathbb{F}$  上の線形空間とする. 線形写像  $f : X \rightarrow Y$  の核 (kernel)

$$\ker f := \{x \in X \mid f(x) = 0\} \subset X,$$

および像

$$\operatorname{im} f := \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

はそれぞれ,  $X, Y$  の線形部分空間である.  $\operatorname{im} f$  の次元をランクという:  $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{im} f$ .

事実 23.  $X, Y$  を線形空間, 線形写像  $f : X \rightarrow Y$  が単射であることと  $\ker f = \{0\}$  は同値である.

$M$  を  $X$  の部分空間とする.  $X$  の 2 項関係  $\sim_M$  を

$$x' \sim_M x'' :\Leftrightarrow x' - x'' \in M$$

によって定める.  $\sim_M$  は同値関係である. すなわち,

$$x \sim_M x,$$

$$x' \sim_M x'' \Rightarrow x'' \sim_M x',$$

および

$$x' \sim_M x'', x'' \sim_M x''' \Rightarrow x' \sim_M x'''$$

を満たす. 同値類と呼ばれる集合を

$$[x] := \{x' \sim_M x \mid x' \in X\}$$

と定義し, 同値類の間の演算を

$$[x] + [x'] := [x + x'],$$

$$\alpha[x] := [\alpha x]$$

と定めれば同値類全体の集合

$$\{[x] \mid x \in X\}$$

は線形空間をなす (確認せよ). この空間を商空間 (quotient space) と呼び  $X/M$  と書く.

補題 24.  $X$  を有限次元ベクトル空間,  $M$  を  $X$  の部分空間とする. このとき  $\dim X/M = \dim X - \dim M$  が成り立つ.

証明.  $\dim M = r, \dim X = n$  とする.  $M$  の基底  $\{v_1, \dots, v_r\}$  を定め, これに  $n - r$  本のベクトルを追加して  $X$  の基底  $\{v_1, \dots, v_r, \dots, v_n\}$  を構成する.  $\{[v_{r+1}], \dots, [v_n]\}$  が  $X/M$  の基底をなすことを示せば十分である.  $[0] = M$  であるから,

$$\alpha_{r+1}[v_{r+1}] + \dots + \alpha_n[v_n] = [\alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_nv_n] = [0]$$

は

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_nv_n \in M$$

を意味する. しかし,  $v_{r+1}, \dots, v_n$  の選び方からこれが成り立つのは  $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = 0$  のときだけである. よって,  $\{[v_{r+1}], \dots, [v_n]\}$  は  $X/M$  の 1 次独立なベクトルの組である. 任意の  $x \in X$  について

$$[x] = \left[ \sum_{i=1}^n x_i v_i \right] = \left[ \sum_{i=r+1}^n x_i v_i \right] = \sum_{i=r+1}^n x_i [v_i]$$

が成り立つので,  $X/M = \text{span}\{[v_{r+1}], \dots, [v_n]\}$  が成り立つ. □

$f: X \rightarrow Y$  を線形写像とする.  $M = \ker f$  に対する商空間  $X/\ker f$  はひととき重要な性質をもっている.

定理 25 (準同型定理).  $X/\ker f \simeq \text{im} f$ .

証明. 同型写像が存在することを示せばよい. 表記を簡略化するため  $\sim_{\ker f}$  を単に  $\sim$  と書く.  $x \sim x' \Leftrightarrow x - x' \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = f(x')$  に注意せよ. 写像  $\pi: X/\ker f \rightarrow \text{im} f$  を

$$\pi: [x] \mapsto f(x)$$

によって定めれば,  $\pi$  は全単射になる. 線形性も定義から明らかである. □

定理 26.  $\dim X = \dim(\ker f) + \text{rank} f$ .

証明. 補題 24 と定理 25 より,

$$\text{rank} f = \dim \text{im} f = \dim(X/\ker f) = \dim X - \dim \ker f.$$

□

系 27.  $X$  を有限次元線形空間とする. 線形写像  $f: X \rightarrow X$  は単射であれば全射である.

証明.  $\dim \text{im} f = \dim X - \dim\{0\} = \dim X$  より,  $\text{im} f = X$  が成り立つ. □



## 2.4 座標

$X$  を  $\mathbb{F}$  上の有限次元ベクトル空間,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  を  $X$  の基底とする. 1次結合による表現

$$x = x_1v_1 + \dots + x_nv_n, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$$

は一意的なので

$$\begin{aligned} x &\mapsto x_1 \\ &\vdots \\ x &\mapsto x_n \end{aligned}$$

なる写像が定まる. これを  $x_1(x), \dots, x_n(x)$  のように書くと

**事実 28.** 写像  $x \mapsto x_i, i = 1, 2, \dots, n$  は線形写像である.

**証明.**  $x', x'' \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$  とする.  $\alpha x' + \beta x'' = \sum_{k=1}^n (\alpha x'_k + \beta x''_k)v_k$  より,  $x_i(\alpha x' + \beta x'') = \alpha x_i(x') + \beta x_i(x'')$  が成り立つ.  $\square$

**事実 29.** 写像

$$X \ni x \mapsto \begin{bmatrix} x_1(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

は全単射線形写像である. したがって,  $\mathbb{F}$  上の  $n$  次元ベクトル空間はすべて  $\mathbb{F}^n$  と同型である.

## 2.5 行列

$X, Y$  を  $\mathbb{F}$  上の有限次元ベクトル空間とする.  $X$  の基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$  と  $Y$  の基底  $\{w_1, \dots, w_m\}$  を1つ定める. 線形写像  $f: X \rightarrow Y, x \in X$  の1次結合による表現を  $x = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$  とすれば

$$f(x) = x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n).$$

したがって,  $f$  による基底の像を定めれば線形写像が定まる.  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  を  $\{w_1, \dots, w_m\}$  の1次結合で表現すると,

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1f(v_1) + \dots + x_nf(v_n) \\ &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)w_1 \\ &\quad + \dots + (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)w_m. \end{aligned}$$

対応関係

$$X \ni x = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

および

$$Y \ni y = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m \leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m$$

によって次の関係を得る.

$$f(x) \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$y = f(x)$  という関係が特定の基底に依存しない表現であったのに対し, 座標を用いた表現

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

は,  $X$  および  $Y$  の基底を定めた上で得られたことに注意してほしい.

## 2.6 基底の変換

線形写像  $f: X \rightarrow Y$  に関して,  $X$  の基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$  と  $Y$  の基底  $\{w_1, \dots, w_m\}$  を決めて得られた行列表現

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

は基底を取り替えることでどのように変化するだろうか. 今,  $X$  の新しい基底  $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$  と,  $Y$  の新しい基底  $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m\}$  に取り替えるとしよう.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  と  $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$  との間には互いに線形結合によって表現できるという関係があるので, 正則行列  $P$  を用いて

$$[v_1 \ \cdots \ v_n] P = [\tilde{v}_1 \ \cdots \ \tilde{v}_n]$$

と表現できる.<sup>6</sup> 同様に正則行列  $Q$  を用いて

$$[w_1 \ \cdots \ w_m] Q = [\tilde{w}_1 \ \cdots \ \tilde{w}_m]$$

とできる.

$$\begin{aligned} [f(\tilde{v}_1) \ \cdots \ f(\tilde{v}_n)] &= \left[ \sum_{i=1}^n p_{i1} f(v_i) \ \cdots \ \sum_{i=1}^n p_{in} f(v_i) \right] \\ &= [f(v_1) \ \cdots \ f(v_n)] P \end{aligned}$$

<sup>6</sup> $P = [p_{ij}]_{ij}$  とすれば,  $\tilde{v}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} v_j$  なる関係をこのように表現している. あるいは列に対する初等変形と考えてもよい.

および

$$[f(v_1) \ \cdots \ f(v_n)] = [w_1 \ \cdots \ w_m] A$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned} [f(\tilde{v}_1) \ \cdots \ f(\tilde{v}_n)] &= [f(v_1) \ \cdots \ f(v_n)] P \\ &= [w_1 \ \cdots \ w_m] AP \\ &= [\tilde{w}_1 \ \cdots \ \tilde{w}_m] Q^{-1} AP \end{aligned} \quad (3)$$

を得る. これは, 新しい基底に関する  $f$  の行列表現が  $Q^{-1}AP$  であることを表している.

### 3 不変部分空間

$X$  を有限次元ベクトル空間,  $M \subset X$  を部分空間とする. 線形写像  $f: X \rightarrow X$  が  $M$

$$f(M) \subset M$$

を満たすとき,  $M$  は  $f$  の不変部分空間 (invariant subspace) であるという.

#### 3.1 ブロック対角化

$X$  が不変部分空間の直和として

$$X = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$$

と分解されるとき,  $f$  の行列表現がブロック対角行列となることを示そう.

$M_i$  の基底を  $\{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , とすると,

$$\bigcup_{i=1}^k \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}, \quad \dim X = n_1 + \cdots + n_k$$

は  $X$  の基底を成す.  $f(M_i) \subset M_i$  より  $v_{j\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, n_\ell$ ,  $j \neq i$  に対して  $f(v_{j\ell}) = 0$  となる. したがって,

$$\begin{aligned} f(v_{i1}) &= a_{i,11}v_{i1} + \cdots + a_{i,n_i1}v_{in_i} \\ &\vdots \\ f(v_{in_i}) &= a_{i,1n_i}v_{i1} + \cdots + a_{i,n_in_i}v_{in_i}. \end{aligned}$$

$f|_{M_i}: M_i \rightarrow M_i$  の行列表現を  $A_i = (a_{i,st})$  とすれば

$$[f(v_{i1}) \ \cdots \ f(v_{in_i})] = [v_{i1} \ \cdots \ v_{in_i}] A_i.$$

$f$  の行列表現  $A$  は

$$\begin{aligned} &[f(v_{11}) \ \cdots \ f(v_{1n_1}) \ \cdots \ \cdots \ f(v_{k1}) \ \cdots \ f(v_{kn_k})] \\ &= [v_{11} \ \cdots \ v_{1n_1} \ \cdots \ \cdots \ v_{k1} \ \cdots \ v_{kn_k}] \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 3.2 固有値分解

$X$  を  $n$  次元ベクトル空間,  $f: X \rightarrow X$  が相異なる固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ;

$$f(v_i) = \lambda_i v_i, \quad v_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

を持つとしよう. このとき,

$$E_i := \{v_i \mid f(v_i) = \lambda_i v_i\}$$

は 1 次元の線形部分空間であり,

$$X = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$$

が成り立つ.  $E_i$  を固有値  $\lambda_i$  に対応する固有空間という. 非ゼロベクトル  $v_1 \in E_1, \dots, v_n \in E_n$  は  $X$  の基底をなす.

線形写像  $f$  を適当な基底  $\{e_1, \dots, e_n\}$  について行列表現したものを  $A$  とする. 固有空間が決める新しい基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$  への変換行列を  $P$  とすれば

$$[v_1 \ \dots \ v_n] = [e_1 \ \dots \ e_n] P$$

である. 式 (3) より

$$\begin{aligned} [f(v_1) \ \dots \ f(v_n)] &= [f(e_1) \ \dots \ f(e_n)] P \\ &= [e_1 \ \dots \ e_n] AP \\ &= [v_1 \ \dots \ v_n] P^{-1} AP \end{aligned}$$

が成り立つ. 前小節の結果から,  $P^{-1}AP$  は対角行列であることが分かる. すなわち,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

固有値は一般には複素数であるので, 実行列であっても  $\mathbb{C}^n$  の範囲で対角化は考える必要がある.  $\mathbb{C}$  が  $\mathbb{R}^2$  で表されることをふまえると, 見かけ上次元が増えてしまうようにも思える. しかし, 複素固有値  $\lambda = a + bj$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  に対しては共役複素数  $a - bj$  も固有値であること,  $a + bj$  に対する複素固有ベクトルは  $v + jw$ ,  $v, w \in \mathbb{R}^n$  は  $a - bj$  に対応する固有ベクトル  $v - jw$  と必ずペアで現れる. これは

$$A(v + jw) = (a + bj)(v + jw)$$

の共役複素数を取ると

$$A(v - jw) = (a - bj)(v - jw)$$

が成り立つことから直ちに分かる. これら 2 式を足し上げると,

$$Av = -bw + av.$$

2 式の差を取ると

$$Aw = aw + bv$$

を得る. すなわち, 2次元の (実) 部分空間  $\text{span}\{w, v\}$  が複素固有値  $\lambda$  に対応している. これを基底にしたときの表現行列は

$$[Aw \quad Av] = [w \quad v] \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

すなわち  $aI + bJ$ .

以上をまとめると, 次の定理を得る.

**定理 30.** 有限次元ベクトル空間上の線形写像  $f : X \rightarrow X$  が相異なる固有値を持つとき, 表現行列を複素数の範囲で対角化できる. 実数の範囲ではブロック対角化できる.