問題2 解答編

経済動学 **2016Q1**
資料番号: **16EDP2S**

mail@**kenjisato**.jp

2016 年 5 月 3 日

問題 1　次の行列のジョルダン標準形を求めよ:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -5 & 8 & -6 \\ -8 & 12 & -9 \end{bmatrix}.$$

<u>A_3 のジョルダン分解</u>　固有値は

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -j \\ -j & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 = 0$$

の解である. したがって, $\lambda = 0$ (2 重根). 固有ベクトル p_1 は

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} - 0I \right) p_1 = \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} p_1 = 0$$

の解である. 同値な変形 (行基本変形) を施すと,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ j & -1 \end{bmatrix} p_1 = 0.$$

これを満たす非ゼロベクトルは例えば

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}.$$

一般固有ベクトル p_2 を

$$\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} p_2 = p_1$$

によって求める.

$$\begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$$

に行基本変形を施して,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ j & -1 \end{bmatrix} p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix}.$$

これを満たす非ゼロベクトルは例えば

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

である.

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば,

$$P^{-1} = \frac{1}{-j} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -j & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P^{-1} A_3 P &= \begin{bmatrix} 0 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

<u>A_4 のジョルダン分解</u>　固有値は

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -5 & 8 & -6 \\ -8 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{A_3}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 3 & -2 \\ 5 & \lambda - 8 & 6 \\ 8 & -12 & \lambda + 9 \end{bmatrix} = 0$$

の解である.

$$\begin{array}{rcrrrr} (\lambda-2)(\lambda-8)(\lambda+9) & = & \lambda^3 & -\lambda^2 & -74\lambda & +144 \\ 3 \cdot 6 \cdot 8 & = & & & & 144 \\ (-2) \cdot 5 \cdot (-12) & = & & & & 120 \\ -(-2) \cdot (\lambda - 8) \cdot 8 & = & & & 16\lambda & -128 \\ -3 \cdot 5 \cdot (\lambda + 9) & = & & & -15\lambda & -135 \\ -(\lambda - 2) \cdot 6 \cdot (-12) & = & & & 72\lambda & -144 \\ \hline \phi_{A_3}(\lambda) & = & \lambda^3 & -\lambda^2 & -\lambda & +1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \phi_{A_3}(\lambda) &= \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

$\lambda = -1$ に対応する固有ベクトル p_{-1} は

$$\begin{bmatrix} 2+1 & -3 & 2 \\ -5 & 8+1 & -6 \\ -8 & 12 & -9+1 \end{bmatrix} p_{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \\ -8 & 12 & -8 \end{bmatrix} p_{-1} = 0$$

の解である. 行変形を施して,

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} p_{-1} = 0$$

を得る. したがって,

$$p_{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

は固有値の 1 つである.

$\lambda = 1$ (2 重根) に対応する固有ベクトル p_1 は

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -3 & 2 \\ -5 & 8-1 & -6 \\ -8 & 12 & -9-1 \end{bmatrix} p_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 7 & -6 \\ -8 & 12 & -10 \end{bmatrix} p_1 = 0$$

の解である. 行変更を施して,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} p_1 = 0$$

を得る. 解の自由度は 1 であり,

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

が解の 1 つ. 一般固有ベクトルを求めるために,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 7 & -6 \\ -8 & 12 & -10 \end{bmatrix} p_2 = p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を p_2 について解く. 行変換を施して,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解の 1 つは

$$p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

変換行列

$$P = \begin{bmatrix} p_{-1} & p_1 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}A_4P &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -5 & 8 & -6 \\ -8 & 12 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

<u>一般固有ベクトルの順序について</u>

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

とすると,

$$\bar{P}^{-1}A_4\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

となる. あるいは, 一般固有空間の基底を降順に並び替えると

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} p_2 & p_1 & p_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角のジョルダン細胞が並ぶようになる.

$$\bar{\bar{P}}^{-1}A_4\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

問題 2　ジョルダン細胞のべき乗

$$J_r(\lambda)^t, \quad t \in \mathbb{N}$$

を計算せよ. (ヒント:

$$\begin{aligned} J_r(\lambda) &= \lambda I_r + N_r \\ &=: \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と分解したとき,

$$(\lambda I_r)N_r = N_r(\lambda I_r), \qquad (N_r)^r = 0$$

が成り立つことに注意せよ.)

解答　λI_r と N_r の可換性により, 2 項定理が使えるので

$$\begin{aligned} J_r(\lambda)^t &= (\lambda I_r + N_r)^t \\ &= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \lambda^{t-k} N_r^k \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{t, r-1\}} \binom{t}{k} \lambda^{t-k} N_r^k \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!(t-k)!}$．$N_r$ のべき乗は次のように，1 の並びが 1 つずつ右上に上がっていくことを確認せよ:

$$N_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad N_6^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_6^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad N_6^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_6^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad N_6^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

したがって，

$$J_r(\lambda)^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & t\lambda^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2}\lambda^{t-2} & \ddots & \begin{pmatrix} t \\ r-2 \end{pmatrix}\lambda^{t-r+2} & \begin{pmatrix} t \\ r-1 \end{pmatrix}\lambda^{t-r+1} \\ & \lambda^t & t\lambda^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2}\lambda^{t-2} & \ddots & \begin{pmatrix} t \\ r-2 \end{pmatrix}\lambda^{t-r+2} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & t\lambda^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2}\lambda^{t-2} \\ & & & & \lambda^t & t\lambda^{t-1} \\ & & & & & \lambda^t \end{bmatrix}.$$

問題 3　任意の行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対し，適当な正則行列 P を選べば $P^{-1}AP$ が Jordan 標準形をもつようにできる．この定理を用いて A の固有値 λ がすべて $|\lambda| < 1$ を満たすとき

$$A^t \to 0, \quad t \to \infty$$

が成り立つことを示せ．収束は要素ごとの収束を考えてよい．

解答　$p(t)$ を t の多項式，$|\lambda| < 1$ とすると，

$$p(t)\lambda^t \to 0, \quad t \to \infty$$

が成り立つことを確認しておく．これには任意の n について

$$t^n\lambda^t = \frac{t^n}{(1/\lambda)^t} \to 0$$

が成り立つことを見れば十分である．ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{t^n}{(1/\lambda)^t} &= \lim_{t\to\infty}\frac{nt^{n-1}}{(1/\lambda)^t(-\log\lambda)}\\ &= \cdots\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(1/\lambda)^t\,(-\log\lambda)^n}\\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって, 任意の $r\in\mathbb{N}$, $|\lambda|<1$ について

$$J_r(\lambda)^t \to 0$$

が成り立つ．A のジョルダン分解

$$A = P\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}(\lambda_k)\end{bmatrix}P^{-1}$$

により,

$$A^t = P\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1)^t & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_k}(\lambda_k)^t\end{bmatrix}P^{-1} \to 0, \quad t\to\infty$$

が分かる．

行列指数関数　連続時間のシステムを分析する場合, べきではなく指数関数が中心的な役割を果たす．行列指数関数 e^{At} が次のように定義される．

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n.$$

$A = PJP^{-1}$ とジョルダン分解されるとき,

$$e^{At} = e^{PJP^{-1}t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(PJP^{-1}\right)^n = P\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}J^n\right)P^{-1} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

したがって, ジョルダン細胞の指数関数を計算しさえすればよい．

$$J_r(\lambda)^n = \sum_{k=0}^{\min\{n,r-1\}}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N_r^k$$

より,

$$e^{J_r(\lambda)t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^{n-k} N_r^k \right).$$

成分 $\left[e^{J_r(\lambda)t}\right]_{ij}$, $j = i, i+1, i+r-1$ は次のように計算できる.

$$\left[e^{J_r(\lambda)t}\right]_{ij} = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{if } i = j \\ \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t} & \text{if } i + k = j \end{cases}$$

ただし $k = 1, 2, \ldots, r-1$. まとめると,

$$e^{J_r(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & t & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

全ての固有値の実部が負であれば, 連続時間線形システム $\dot{x} = Ax$ が安定である. この事実は $\lambda = a + bj$ としたとき, $a < 0$ であれば

$$|e^{\lambda t}| = |e^{at} e^{btj}| = e^{at} \to 0$$

が成り立つからである. ($t^{r-1} e^{at} \to 0$ が成り立つことは確認しておくこと).